Transport optimal dans le groupe de Heisenberg

Séminaire GT3

Nicolas JUILLET

Institut Fourier (Grenoble),
Institut für angewandte Mathematik (Bonn)

Plan de l'exposé

Espace géodésique

Dans un espace métrique (X,d), $\gamma : [0,1] \to X$ est une géodésique si pour tout $s, s' \in [0,1]$

$$d(\gamma(s), \gamma(s')) = |s - s'| d(\gamma(0), \gamma(1)).$$

Un espace métrique (X,d) est dit géodésique si pour tout (p,q) il y a une géodésique γ de p à q.

Quand γ est unique, on définit la function interpolation par $\mathcal{M}^s(p,q) = \gamma(s)$.

Entropie de Boltzmann

L' entropie d'une mesure de probabilité μ de densité ρ est donnée par

$$\mathrm{Ent}(\rho\nu \mid \nu) = \int \rho \ln(\rho)(x) d\nu(x).$$

Si μ est singulière, $\mathrm{Ent}(\mu) = +\infty$.

Grande entropie: μ concentrée sur peu d'espace.
Petite entropie: μ remplit beaucoup d'espace.

Un espace (X, d, ν) vérifie $CD(0, +\infty)$ si

$\forall \mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ absolument continues, il existe une géodésique $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ telle que $s \in [0,1] \to \mathrm{Ent}(\mu_s \mid \nu) \in \mathbb{R}$ est convexe.

Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ avec la structure multiplicative :

$$(x,y,t)\cdot(x',y',t') = (z,t)\cdot(z',t') = \left(z+z', t+t' - \frac{\mathrm{Im}(z\overline{z'})}{2}\right).$$

La mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^3$ est invariante par translation à gauche.

Les champs de vecteurs invariants à gauche

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial t}$$

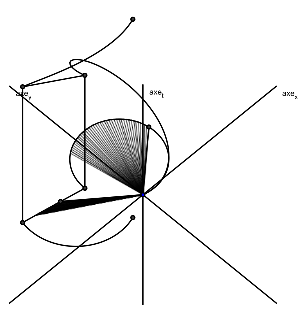
et $\mathbf{T} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}$ engendrent l'espace tangent en tout point.

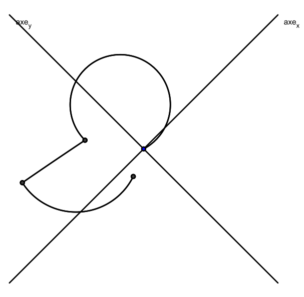
$$d_c(p,q) = \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{a^2(s) + b^2(s)}ds$$

où γ est horizontale:

$$\dot{\gamma}(s) = a(s)\mathbf{X}(\gamma(s)) + b(s)\mathbf{Y}(\gamma(s)).$$

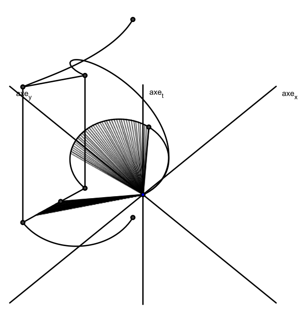
Géodésiques de $\mathbb{H}$.

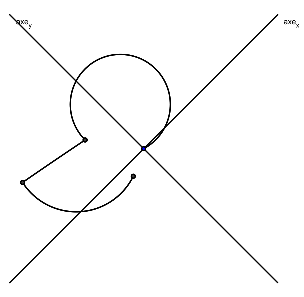




- Une courbe est horizontale si et seulement si la troisième coordonnée évolue comme l'aire algébrique balayée par la projection complexe.
- La longueur des courbes horizontales est exactement la longueur de leurs projetées sur $\mathbb{C}$.
- Les géodesiques de $\mathbb{H}_1$ sont les courbes horizontales dont la projection sur $\mathbb{C}$ est un arc cercle ou une droite.

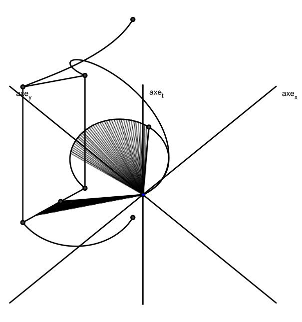
Géodésiques de $\mathbb{H}$.

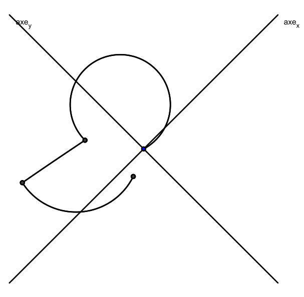




- Une courbe est horizontale si et seulement si la troisième coordonnée évolue comme l'aire algébrique balayée par la projection complexe.
- La longueur des courbes horizontales est exactement la longueur de leurs projetées sur $\mathbb{C}$.
- Les géodesiques de $\mathbb{H}_1$ sont les courbes horizontales dont la projection sur $\mathbb{C}$ est un arc cercle ou une droite.

Géodésiques de $\mathbb{H}$.





- Une courbe est horizontale si et seulement si la troisième coordonnée évolue comme l'aire algébrique balayée par la projection complexe.
- La longueur des courbes horizontales est exactement la longueur de leurs projetées sur $\mathbb{C}$.
- Les géodesiques de $\mathbb{H}_1$ sont les courbes horizontales dont la projection sur $\mathbb{C}$ est un arc cercle ou une droite.

L'estimée clef

Estimée clef

Pour tout $e \in \mathbb{H}$, L'application de contraction $\mathcal{M}_e^s : f \to \mathcal{M}^s(e,f)$ est différentiable et

$$\mathrm{Jac}(\mathcal{M}_e^s)(f) \geq s^5.$$

Cas d'égalité : e and f sont sur une droite.

Par conséquent $(\mathbb{H}, d_c, \mathcal{L}^3)$ vérifie $MCP(0,5)$:

Propriété de Contraction de Mesure $MCP(0,N)$ pour un espace (X,d,ν):

Pour tout point $e \in X$, pour tout $F \subset X$ et pour tout $s \in [0,1]$,

$$\nu(\mathcal{M}^s(e,F)) \geq s^N \nu(F).$$

Premier résultat

Théorème (Ambrosio, Rigot, 2004)

Soit $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ tels que μ_0 est absolument continue. Alors il existe un **unique** *couplage optimal π. Il s'agit de $\pi = (\mathrm{Id} \otimes T)_{\#}\mu_0$ où T est une application. De plus il existe une* **unique** *géodesique entre p et $T(p)$ (μ_0-presque surement).*

Soit $T_s(p) = \mathcal{M}^s(p, T(p))$. Il y a une unique géodésique $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ entre μ_0 et μ_1.

Celle-ci est définie par $\mu_s = \mathcal{M}^s(\mu_0, \mu_1) = (T_s)_{\#}\mu_0$.

Question ouverte (Ambrosio, Rigot)

Soit μ_0 une mesure absolument continue et $s < 1$. la mesure μ_s est-elle aussi absolument continue?

Théorème (Figalli, J.)

Soit $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ une géodésique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ et μ_0 absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^3$. Alors pour tout $s \in [0,1)$, μ_s est aussi absolument continue.

Premier résultat

Théorème (Ambrosio, Rigot, 2004)

Soit $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ tels que μ_0 est absolument continue. Alors il existe un **unique** *couplage optimal π. Il s'agit de $\pi = (\mathrm{Id} \otimes T)_{\#}\mu_0$ où T est une application. De plus il existe une* **unique** *géodesique entre p et $T(p)$ (μ_0-presque surement).*

Soit $T_s(p) = \mathcal{M}^s(p, T(p))$. Il y a une unique géodésique $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ entre μ_0 et μ_1.

Celle-ci est définie par $\mu_s = \mathcal{M}^s(\mu_0, \mu_1) = (T_s)_{\#}\mu_0$.

Question ouverte (Ambrosio, Rigot)

Soit μ_0 une mesure absolument continue et $s < 1$. la mesure μ_s est-elle aussi absolument continue?

Théorème (Figalli, J.)

Soit $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ une géodésique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ et μ_0 absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^3$. Alors pour tout $s \in [0,1)$, μ_s est aussi absolument continue.

Premier résultat

Théorème (Ambrosio, Rigot, 2004)

Soit $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ tels que μ_0 est absolument continue. Alors il existe un **unique** *couplage optimal π. Il s'agit de $\pi = (\mathrm{Id} \otimes T)_{\#}\mu_0$ où T est une application. De plus il existe une* **unique** *géodesique entre p et $T(p)$ (μ_0-presque surement).*

Soit $T_s(p) = \mathcal{M}^s(p, T(p))$. Il y a une unique géodésique $(\mu_s)_{s \in [0,1]}$ entre μ_0 et μ_1.

Celle-ci est définie par $\mu_s = \mathcal{M}^s(\mu_0, \mu_1) = (T_s)_{\#}\mu_0$.

Question ouverte (Ambrosio, Rigot)

Soit μ_0 une mesure absolument continue et $s < 1$. la mesure μ_s est-elle aussi absolument continue?

Théorème (Figalli, J.)

Soit $(\mu_s)_{s \in [0,1]}$ une géodésique de $\mathcal{P}_2(\mathbb{H})$ et μ_0 absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^3$. Alors pour tout $s \in [0,1)$, μ_s est aussi absolument continue.

Courbure de Ricci synthétique

Nouvelles définitions de courbure de Ricci positive pour les espaces métriques mesurés (X, d, ν):

- Propriété de Contraction de Mesure $MCP(K,N)$ (Sturm; Ohta 2006)
- Courbure-Dimension $CD(K,N)$ (Lott - Villani; Sturm 2006)(Bakry - Émery)

$$CD(0,N) \Rightarrow \text{Brunn-Minkowski}(0,N) \Rightarrow MCP(0,N).$$

Courbure de Ricci synthétique

Nouvelles définitions de courbure de Ricci positive pour les espaces métriques mesurés (X, d, ν):

- Propriété de Contraction de Mesure $MCP(K, N)$ (Sturm; Ohta 2006)
- Courbure-Dimension $CD(K, N)$ (Lott - Villani; Sturm 2006)(Bakry - Émery)

$$CD(0, N) \Rightarrow \text{Brunn-Minkowski}(0, N) \Rightarrow MCP(0, N).$$

Second résultat

Théorème (J.)

Pour $(\mathbb{H}, \mathcal{L}^3, d_c)$*, le groupe de Heisenberg avec la mesure de Lebesgue et la distance de Carnot-Carathéodory*

- $MCP(0,N)$ *est vraie si et seulement si* $N \geq 5$*,*
- $CD(0,N)$ *et* $BM(0,N)$ *sont faux pour tout* N*.*

Inégalité de Brunn-Minkowski $BM(0,N)$:

Un espace (X,d,ν) satisfait l'inégalité de Brunn-Minkowski $BM(0,N)$ si

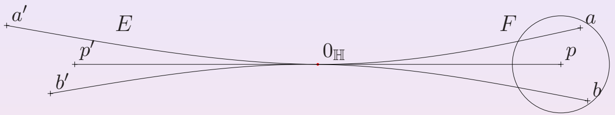
Pour tout $E,F \subset X$ et pour tout $s \in [0,1]$,

$$\nu^{1/N}(\mathcal{M}^s(E,F)) \geq (1-s)\nu^{1/N}(E) + s\nu^{1/N}(F).$$

En particulier si $\nu(E) = \nu(F)$,

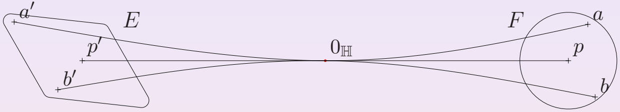
$$\nu(\mathcal{M}^{1/2}(E,F)) \geq \frac{\nu^{1/N}(E) + \nu^{1/N}(F)}{2} = \nu(E) = \nu(F).$$

Éléments de démonstration



Soit F une petite boule de centre p telle que $0_{\mathbb{H}}$ et p sont sur une “mauvaise” géodésique. Pour E on prend l'“inverse géodésique” de F.

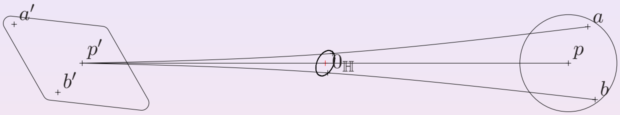
Éléments de démonstration



Soit F une petite boule de centre p telle que $0_{\mathbb{H}}$ et p sont sur une “mauvaise” géodésique. On prend E l'“inverse géodésique” de F. Or $\mathcal{L}^3(E) = \mathcal{L}^3(F)$.

On veut démontrer $\mathcal{L}^3\left(\mathcal{M}^{1/2}(E,F)\right) < \mathcal{L}^3(F)$ et ainsi que $BM(0,+\infty)$ est absurde.

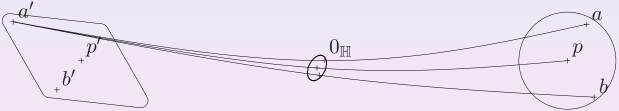
Éléments de démonstration



Pour tout $e \in E$, l'ensemble contracté $\mathcal{M}^{1/2}(e, F)$ est une sorte d'ellipsoïde qui contient $0_{\mathbb{H}}$. Le volume d'une telle ellipsoïde est

$$2^{-5}\mathcal{L}^3(F).$$

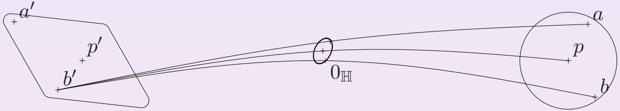
Éléments de démonstration



Pour tout $e \in E$, l'ensemble contracté $\mathcal{M}^{1/2}(e, F)$ est une sorte d'ellipsoïde qui contient $0_{\mathbb{H}}$. Le volume d'une telle ellipsoïde est

$$2^{-5}\mathcal{L}^3(F).$$

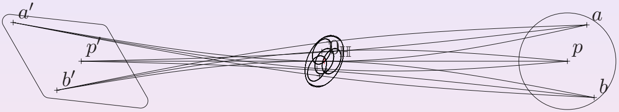
Éléments de démonstration



Pour tout $e \in E$, l'ensemble contracté $\mathcal{M}^{1/2}(e, F)$ est une sorte d'ellipsoïde qui contient $0_{\mathbb{H}}$. Le volume d'une telle ellipsoïde est

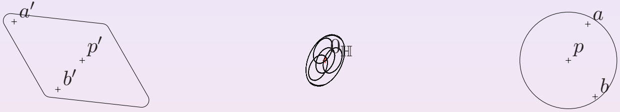
$$2^{-5}\mathcal{L}^3(F).$$

Éléments de démonstration



L'ensemble milieu $\mathcal{M}^{1/2}(E,F)$ est la réunion de ces ellipsoïdes.

Éléments de démonstration



Toutes contiennent $0_{\mathbb{H}}$: $\mathcal{M}^{1/2}(E,F)$ est une ellipsoïde de taille 2. Son volume est

$$2^3\left(\cdot 2^{-5}\mathcal{L}^3(F)\right) = \frac{\mathcal{L}^3(F)}{4}.$$

Alors $\mathcal{L}^3(\mathcal{M}^{1/2}(E,F)) < \mathcal{L}^3(F) = \mathcal{L}^3(E)$.