Stabilité du couplage rideau

Nicolas JUILLET

Université de Strasbourg

Palaiseau, octobre 2014

Résumé

L'ordre convexe

Définition: l'ordre convexe

On écrit

$$\mu \preceq_C \nu$$

et dit que μ est plus petit que ν dans l'ordre convexe si et seulement si il existe un plan π de type martingale tel que

$$\mathrm{proj}^x_\# \pi = \mu \quad \text{and} \quad \mathrm{proj}^y_\# \pi = \nu.$$

D'après un théorème (non constructif) de Strassen, cela équivaut à supposer

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \int \varphi \, \mathrm{d}\nu$$

pour toute fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

L'ordre étendu et les ombres

Proposition - Définition

- On écrit $\mu \preceq_E \nu$ et on dit que μ est plus petit que ν dans l'ordre étendu si
$$F_\mu^\nu := \{\theta : \mu \preceq_C \theta \text{ et } \theta \leq \nu\}$$
est non vide.
- L'ensemble partialement ordonné $(F_\mu^\nu, \preceq_C)$ a un minimum. On appelle cette mesure l'ombre de μ projetée sur ν et on la note $S^\nu(\mu)$.

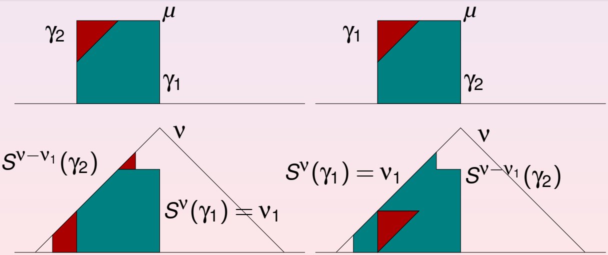


Figure: Ombre de μ projetée sur ν et associativité des ombres.

Fonction potentielle d'une mesure

Définition

La fonction potentielle u_μ de μ est définie par

$$u_\mu : x \mapsto \int |y-x| \mathrm{d}\mu(y).$$

- La dérivée de $u_\mu/2$ est $F_\mu : x \mapsto \mu(]-\infty, x])$ et la dérivée seconde est μ.
- La fonction u_μ est assymptotique à $x \mapsto k.|x-m|$ en $-\infty$ et $+\infty$ avec k la masse et m le barycentre de μ
- On a $\mu \preceq_C \nu$ si et seulement si $u_\mu(x) \leq u_\nu(x)$ pour tout x.

Theorème modèle

Théorème modèle du problème classique de transport de masse

Soit μ et ν éléments de $\mathcal{P}_2$ et π un plan de transport de μ à ν. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

- Le plan π est optimal pour le problème de transport associé au coût $c(x,y) = (y-x)^2$,
- Le plan π est concentré sur un ensemble monotone Γ,
- Le plan π est le couplage par quantiles.

Nous avons démontré un théorème analogue à celui-là pour la variante martingale.

Théoreme pour le problème de transport martingale

Theorem

Soit μ et ν éléments de $\mathcal{P}_3$ pris dans l'ordre convexe et π un plan de transport martingale de μ à ν. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

- Le plan π est optimal pour le problème de transport martingale associé au coût $c(x,y) = (y-x)^3$,
- Le plan de transport π est concentré sur un ensemble "martingale-monotone" Γ (*cf. la figure*),
- Le plan π est the couplage rideau gauche (*c-à-d. transporte* $\mu_{]-\infty,x]}$ *sur son ombre*)

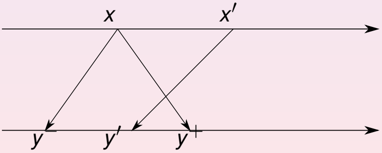


Figure: Cette configuration de trois points (x,y), (x',y^-) et (x',y^+) est interdite sur les ensembles martingale-monotones Γ.

Le lemme variationnel

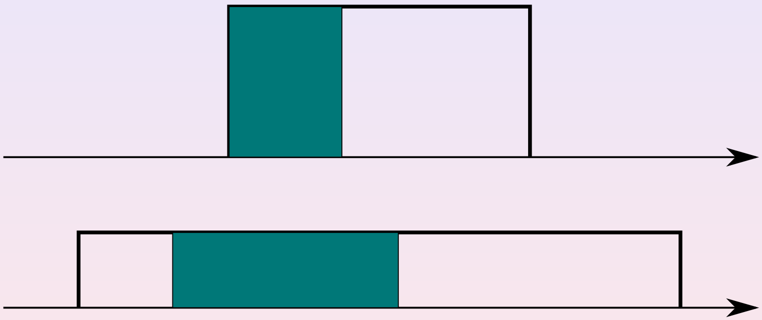
Ce lemme est adapté aux problèmes de transport martingale pour les fonctions c continues.

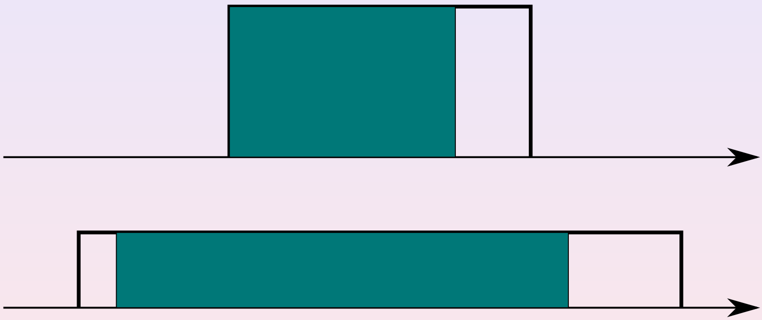
Lemme variationnel

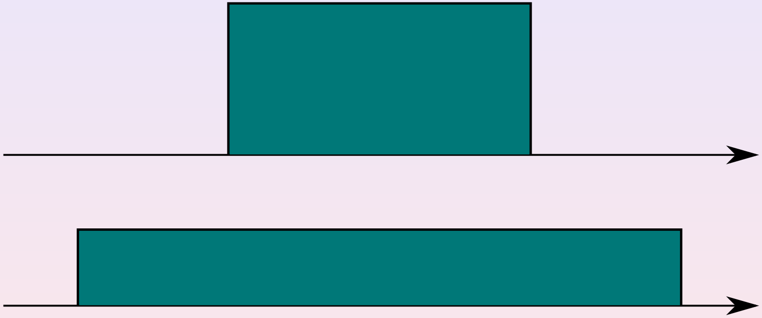
Soit π un plan optimal. Il existe $\Gamma \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que pour toute mesure finiment supportée α qui satisfait $\alpha(\Gamma) = 1$, le minimum de l'application $\alpha' \mapsto \int c(x,y)\,\mathrm{d}\alpha'(x,y)$ restreinte à

$$\mathrm{Comptiteur}(\alpha) = \left\{ \alpha' : \alpha' \begin{array}{l} \text{a les mêmes marginales que } \alpha \\ \forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int y\,\mathrm{d}\alpha_x = \int y\,\mathrm{d}\alpha'_x \end{array} \right\}$$

est obtenu en α.







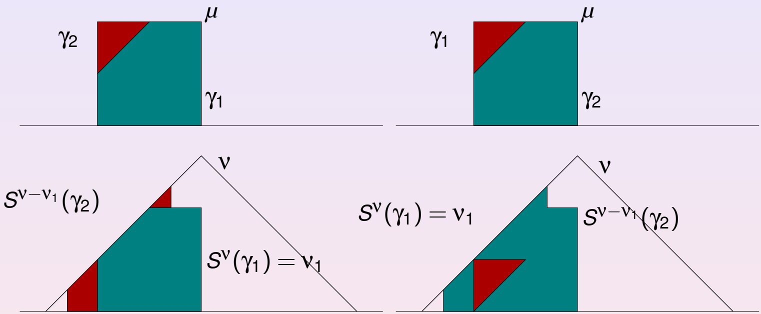
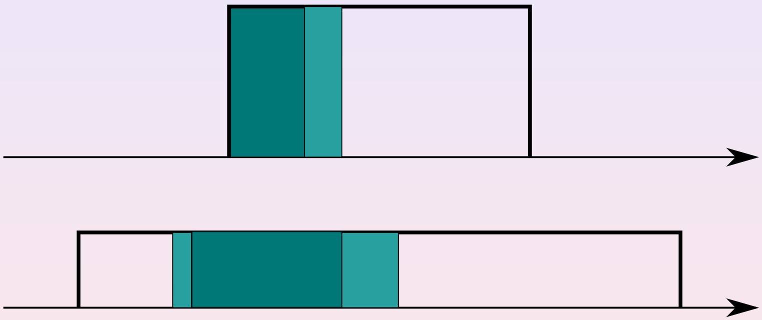
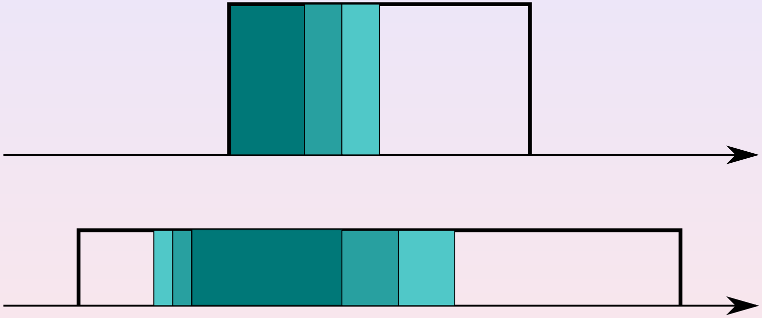
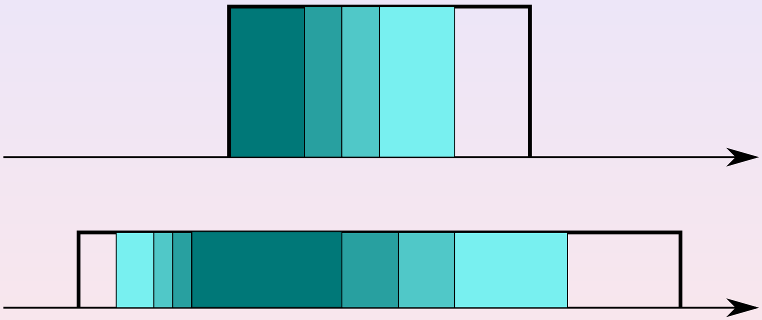
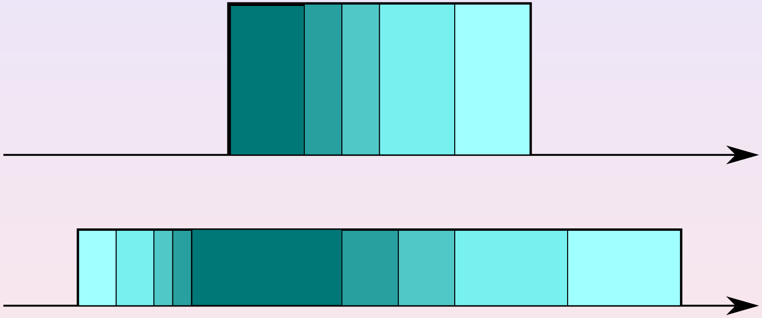


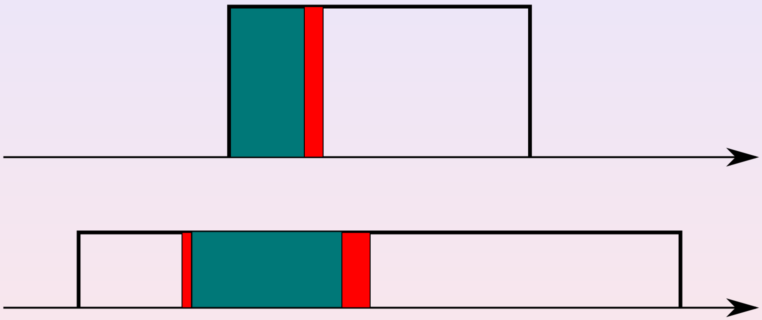
Figure: Ombre de μ projetée sur ν et associativité des ombres.

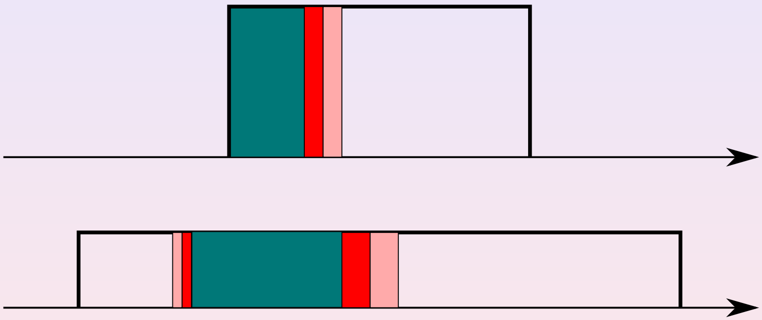


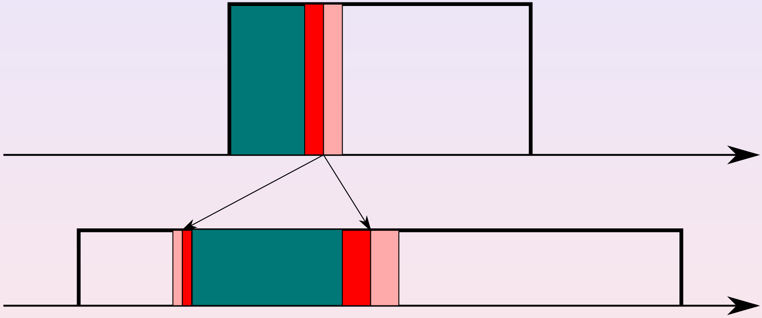


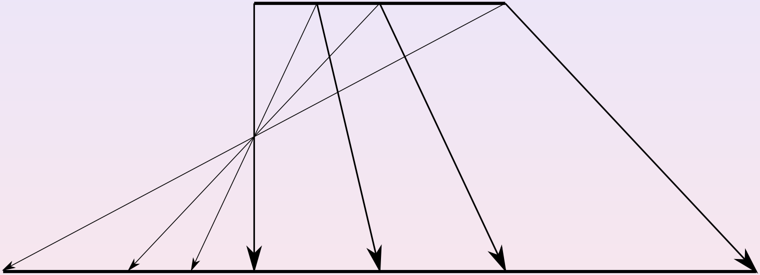












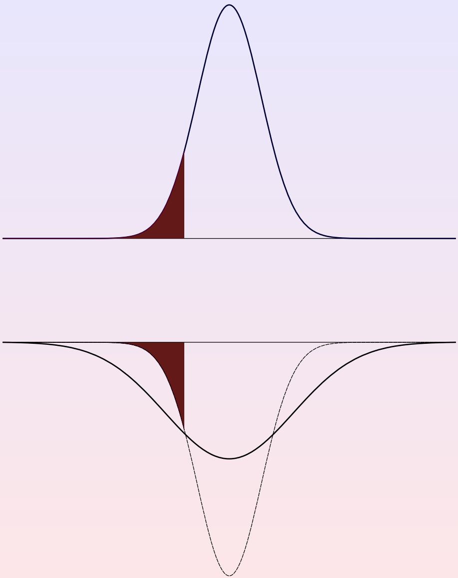


Figure: Plan de transport monotone entre deux mesures gaussiennes.

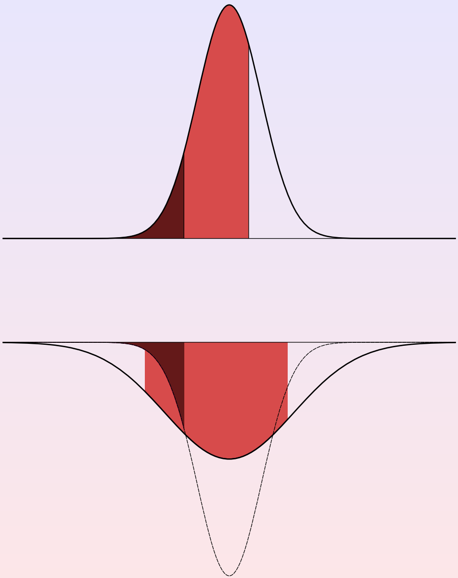


Figure: Plan de transport monotone entre deux mesures gaussiennes.

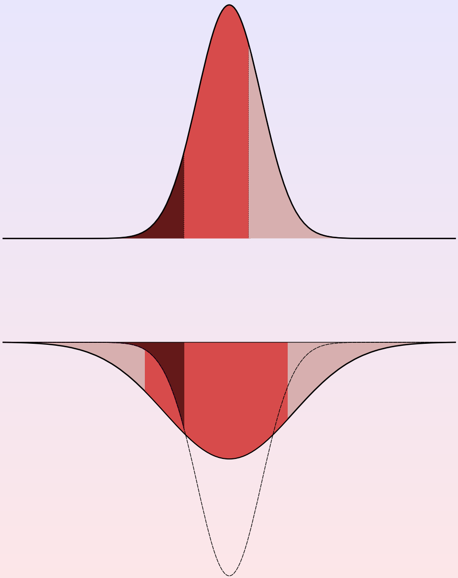


Figure: Plan de transport monotone entre deux mesures gaussiennes.

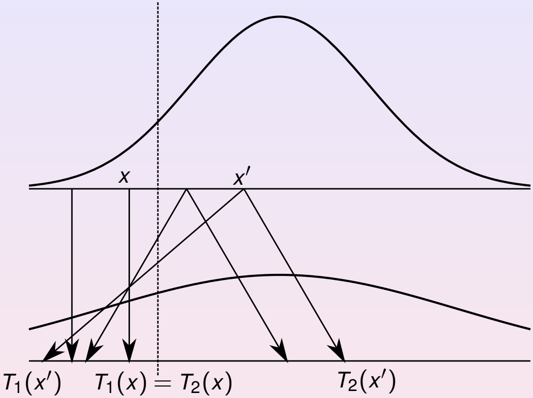
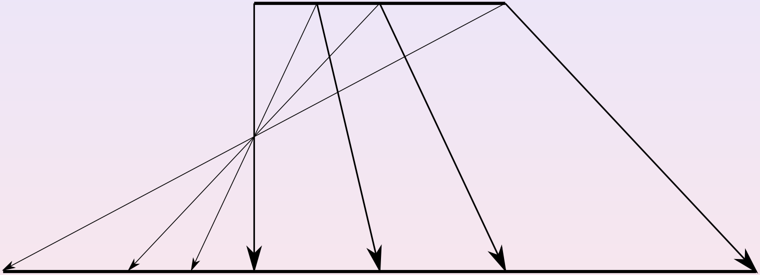
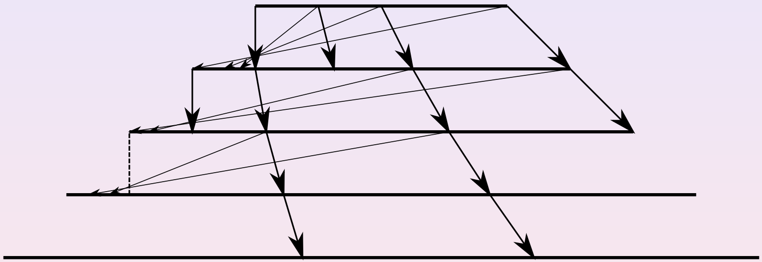


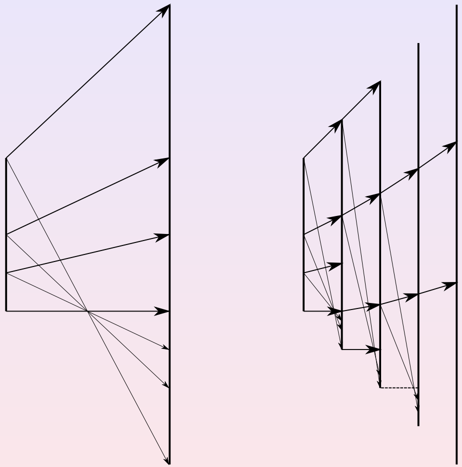
Figure: Plan de transport monotone entre deux mesures gaussiennes.

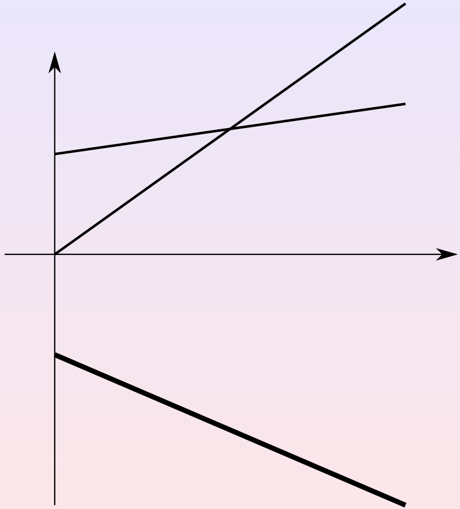


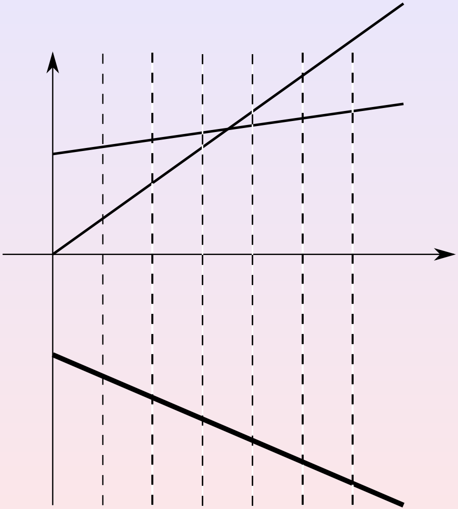


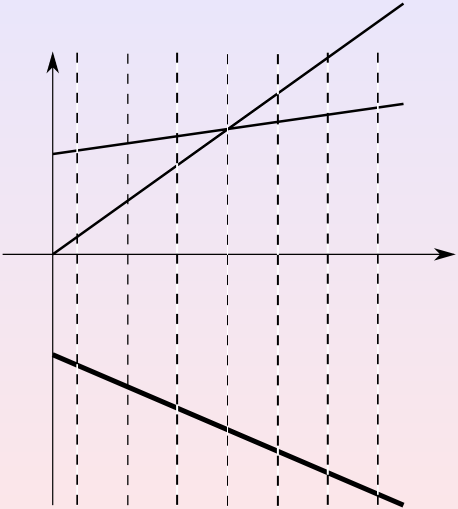
Questions

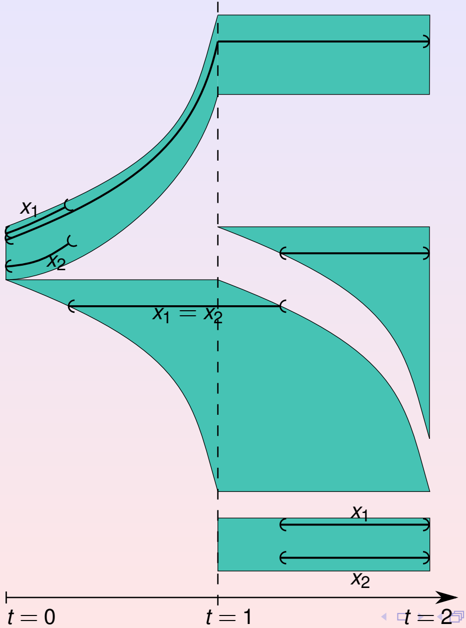
- Existence, Uniqueness of a limit process?
- Choice of a toplology.
- Are limit processes Markovian?










x_1
x_2
$x_1 = x_2$
x_1
x_2
$t = 0$
$t = 1$
$t = 2$

Soit W la distance de Kantorovich (où distance de Wasserstein L^1).

Theorem

Si $S^\nu(\mu)$ et $S^{\nu'}(\mu')$ existent et satisfont $\mu(\mathbb{R}) = \mu'(\mathbb{R})$ et $\nu(\mathbb{R}) = \nu'(\mathbb{R})$, alors

$$W(S^\nu(\mu), S^{\nu'}(\mu')) \leq W(\mu,\mu') + 2W(\nu,\nu').$$

La partie concernant μ,μ' s'appuie sur ce lemme:

Lemme

Si $\mu = \sum^m \delta_{x_i}$ et $\mu' = \sum^m \delta_{x'_i}$ avec pour tout i, $x_i \leq x'_i$ alors

$$S^\nu(\mu) \leq_{\text{sto}} S^\nu(\mu').$$

Ainsi dans ce cas $W(S^\nu(\mu), S^\nu(\mu')) = W(\mu,\mu')$.