

Markovification du processus quantile et transport optimal (avec Charles Boubel)

Groupe de travail en probabilités du MAP5

Nicolas JUILLET

Université de Strasbourg

Paris, Octobre 2017

Plan de l'exposé

- 1 Le processus quantile
- 2 Intermède
- 3 Une extension du théorème de Kellerer pour $\preceq_{\text{sto}}$
- 4 Équation de transport: à la recherche d'un représentant canonique
- 5 Définition/Construction de la mesure quantile rendue markovienne
- 6 Exemples

Loi d'un processus

Avoir une mesure Π sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+})$ est équivalent à connaître toutes les mesures marginales $(e_{r_1, \dots, r_N})_{\#} \Pi$ de dimension finie (pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $r_1 < \dots < r_N$).

La mesure produit

- la mesure μ est markovienne si les vecteurs aléatoires $(X_{r_k})_{k=1,\dots,N}$ ainsi formés sont des chaines de Markov (inhomogènes).
- La mesure produit $\otimes_{t \in \mathbb{R}^+} \mu_t$ de marges $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un exemple de mesure markovienne. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \sim \otimes_{t \in \mathbb{R}^+} \mu_t$, toutes les variables sont indépendantes. Les noyaux de transitions sont $x \mapsto \text{Loi}(X_t | X_s = x) = \text{Loi}(X_t) = \mu_t$.

La mesure quantile

À une famille (de marges) $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ on peut aussi associer la mesure quantile. C'est la mesure image de $\text{Leb}|_{[0,1]}$ par les applications quantiles

$$(G_{\mu_t})_{t \in \mathbb{R}^+} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}.$$

Le processus $(G_{\mu_t})_{t \in \mathbb{R}^+}$ ainsi formé a pour loi la mesure quantile sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ de marges $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Exemples de mesures quantile (ensemble d'indice discret)

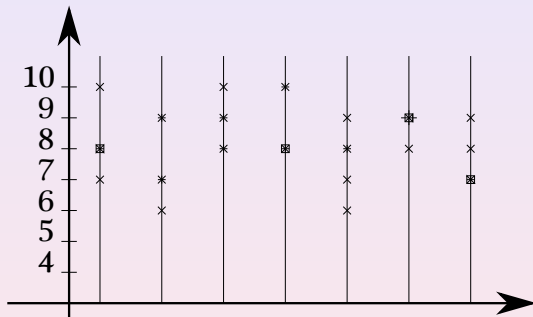


Figure: Les marges

Exemples de mesures quantile (ensemble d'indice discret)

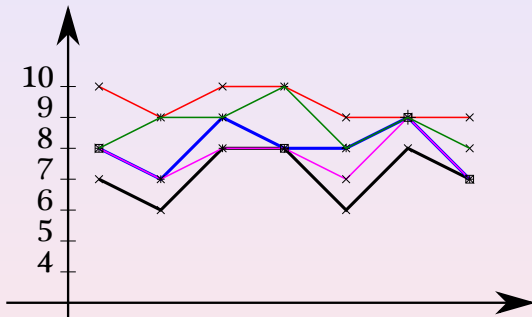


Figure: Cinq trajectoires, chacune de masse $1/5$.

Caractérisation des mesures quantiles par l'inégalité de Hoeffding–Fréchet

Le processus quantile

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ suit la loi quantile associée à $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si et seulement si

- ❶ Pour tout $t \geq 0$, $X_t \sim \mu_t$,
- ❷ Si $(Y_t)_{t \geq 0}$ satisfait à ❶, alors $F_{(X_s, X_t)} \geq F_{(Y_s, Y_t)}$.

Sous ❶, le point ❷ signifie

$$\mathbb{P}(X_t \leq b \mid X_s \leq a) \geq \mathbb{P}(Y_t \leq b \mid Y_s \leq a)$$

ou encore

$$\text{Loi}(X_t \mid X_s \leq a) \preceq_{\text{sto}} \text{Loi}(Y_t \mid Y_s \leq a).$$

Illustration d'un noyau quantile

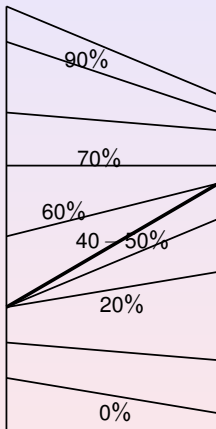


Figure: un noyau quantile

Bonnes propriétés du processus quantile

- Pour l'ordre stochastique,
- en transport optimal.

On va vouloir préserver ces propriétés pour un processus qui sera en plus markovien.

Le processus quantile est croissant lorsque $(\mu_t)_{t \in T}$ l'est.

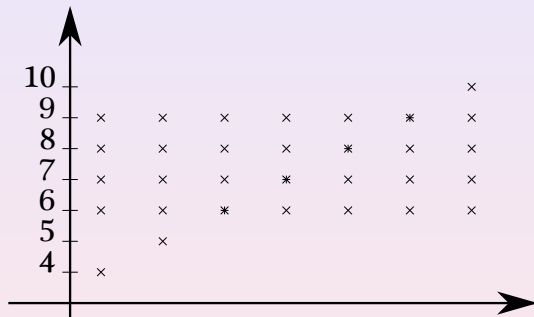


Figure: $(\mu_n)_{n=1}^7$ est croissante pour $\preceq_{\text{sto}}$.

Le processus quantile est croissant lorsque $(\mu_t)_{t \in T}$ l'est.

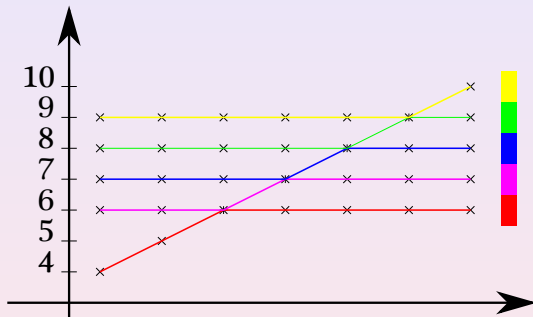


Figure: Le processus quantile est croissant.

Plan de l'exposé

- 1 Le processus quantile
- 2 Intermède
- 3 Une extension du théorème de Kellerer pour $\preceq_{\text{sto}}$
- 4 Équation de transport: à la recherche d'un représentant canonique
- 5 Définition/Construction de la mesure quantile rendue markovienne
- 6 Exemples

Quantile et markovien?

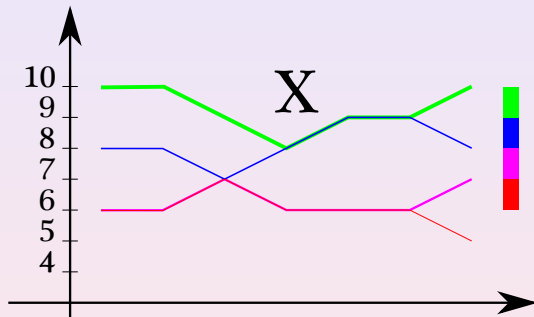


Figure: Un cas de processus quantile non-markovien.

Quantile et markovien?

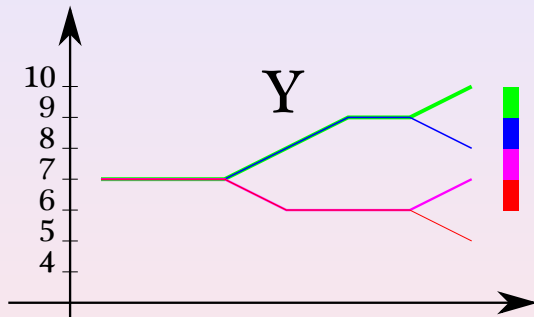


Figure: Un processus quantile markovien.

Quantile et markovien?

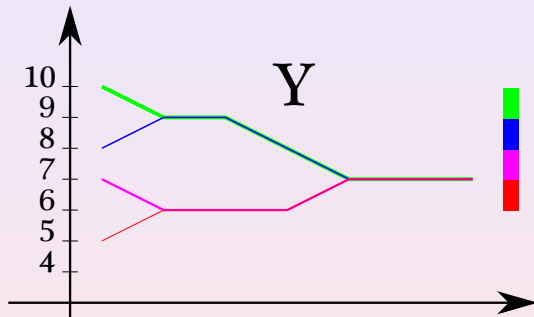


Figure: Encore un.

Quantile et markovien?

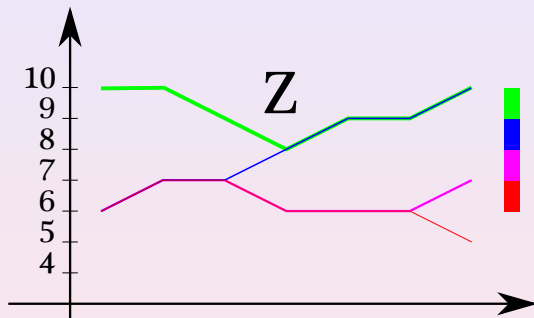


Figure: Et un de plus!.

Quantile et markovien?

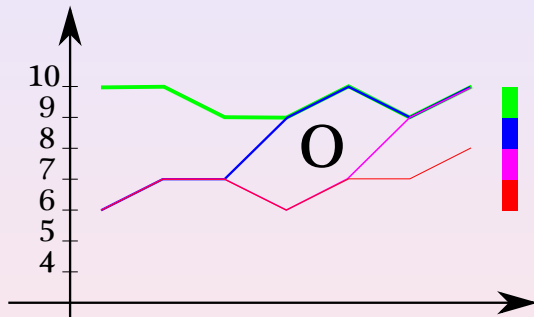


Figure: Encore un.

Plan de l'exposé

- 1 Le processus quantile
- 2 Intermède
- 3 Une extension du théorème de Kellerer pour $\preceq_{\text{sto}}$
- 4 Équation de transport: à la recherche d'un représentant canonique
- 5 Définition/Construction de la mesure quantile rendue markovienne
- 6 Exemples

L'ordre convexe

L'ordre convexe $\mu \preceq_C \nu$ est défini par

$$\forall \varphi \text{ convexe}, \int \varphi d\mu \leq \int \varphi d\nu.$$

Théorème (Strassen 1965)

Soit μ et ν deux mesures de probabilité,

$$\mu \preceq_C \nu$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists (X, Y), \begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ X = \mathbb{E}(Y|X) \end{cases}$$

PCOCs et martingales markoviennes

Théorème (Kellerer 1972)

Soit $(\mu_t)_{t \geq 0}$ croissant pour l'ordre convexe. Alors, il existe $(X_t)_{t \geq 0}$ avec

- $X_t \sim \mu_t$ pour tout $t \geq 0$,
- $X_s = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$ pour tout $s \leq t$,
- le processus est markovien.

L'ordre convexe croissant

L'ordre convexe $\mu \preceq_{\text{C,sto}} \nu$ est défini par

$$\forall \varphi \text{ convexe et croissante, } \int \varphi d\mu \leq \int \varphi d\nu.$$

Théorème (Strassen 1965)

Soit μ et ν deux mesures de probabilité,

$$\begin{aligned} \mu \preceq_{\text{C,sto}} \nu \\ \Leftrightarrow \\ \exists (X, Y), \begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ X \leq \mathbb{E}(Y|X) \end{cases} \end{aligned}$$

PCOCs et sous-martingales markoviennes

Théorème (Kellerer 1972)

Soit $(\mu_t)_{t \geq 0}$ croissant pour l'ordre convexe **croissant**. Alors, il existe $(X_t)_{t \geq 0}$ avec

- $X_t \sim \mu_t$ pour tout $t \geq 0$,
- $X_s \leq \mathbb{E}(X_t | X_s)$ pour tout $s \leq t$,
- le processus est markovien.

L'ordre stochastique

L'ordre stochastique $\mu \preceq_{\text{sto}} \nu$ est défini par

$$\forall \varphi \text{ croissante}, \int \varphi d\mu \leq \int \varphi d\nu$$

Théorème (Strassen 1965)

Soit μ et ν deux mesures de probabilité,

$$\mu \preceq_{\text{sto}} \nu.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists (X, Y), \begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ X \preceq Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$G_\mu \leq G_\nu$$

PCOSs et processus croissants markoviens

Théorème A (Boubel-J. 2017)

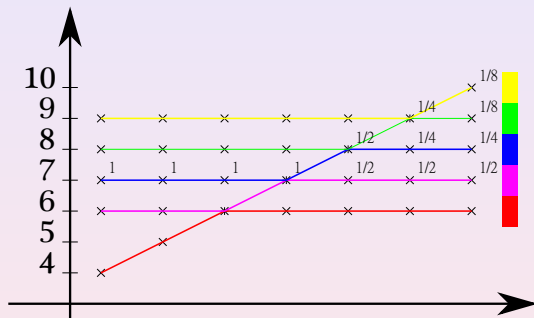
Soit $(\mu_t)_{t \geq 0}$ croissante dans l'ordre stochastique. Alors, il existe $(X_t)_{t \geq 0}$ avec

- ❶ $X_t \sim \mu_t$ pour tout $t \geq 0$,
- ❷ $X_s(\omega) \leq X_t(\omega)$ pour tout $s \leq t$ et presque tout ω ,
- ❸ le processus est markovien.

Remarques:

- Le processus quantile satisfait à ❶ et ❷ (parfois à toutes).

La chaîne de Markov à noyaux quantile.

Figure: Calcul des transitions partant de $X_0 = 7$.

PCOSs et processus croissants markoviens

Théorème A (Boubel-J. 2017)

Soit $(\mu_t)_{t \geq 0}$ croissante dans l'ordre stochastique. Alors, il existe $(X_t)_{t \geq 0}$ avec

- ❶ $X_t \sim \mu_t$ pour tout $t \geq 0$,
- ❷ $X_s(\omega) \leq X_t(\omega)$ pour tout $s \leq t$ et presque tout ω ,
- ❸ le processus est markovien.

Remarques:

- Le processus quantile satisfait à ❶ et ❷ (parfois à toutes).
- Pour $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la chaîne de Markov à noyaux quantile répond au cahier des charges: ❶, ❷ et ❸

Deux idées naïves en vue du Théorème A (pour $t \geq 0$).

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, On peut associer une chaîne de Markov $(X_{n/2^k}^k)_{n \in \mathbb{N}}$ à la suite $(\mu_{n/2^k})_{n \in \mathbb{N}}$. Y a-t-il une limite pour les $t \geq 0$ dyadiques ?
- En remplaçant $(\mu_t)_{t \geq 0}$ par $(\mu_t * \gamma_k)_{t \geq 0}$ où γ_k est un noyau de convolution continu et en faisant $k \rightarrow \infty$, obtient-on un processus markovien ?

Problème: perte de la propriété de Markov lorsque $k \rightarrow \infty$

Deux exemples

Pour tout $k \geq 1$, soit (X_0^k, X_1^k, X_2^k) un processus markovien indexé par $\{0, 1, 2\}$ de loi

- $\frac{1}{2}(\delta_{1,1/k,1} + \delta_{0,0,0})$ ou
- $\frac{1}{2}[(\delta_0 \otimes \lambda(A_k)^{-1}\lambda|_{A_k} \otimes \delta_0) + (\delta_1 \otimes \lambda(\bar{A}_k)^{-1}\lambda|_{\bar{A}_k} \otimes \delta_1)]$.

Dans les deux cas le processus limite n'est pas markovien.

La solution de Kellerer: les noyaux 1-Lipschitz

Definition

Le noyau $k : x \in \mathbb{R} \rightarrow k(x; \cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dit Lipschitz si pour toute fonction 1-Lipschitzienne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow \int f(y)k(x; dy)$ est également 1-Lipschitzienne. Autrement dit $x \rightarrow k(x; \cdot)$ is 1-Lipschitzienne de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de la distance de Kantorovich.

Théorème de Kellerer (1972)

L'opération de composition markovienne utilisée dans les chaines de Markov est continue pour des chaines de Markov à noyaux Lipschitz.

Une autre étape clef du Théorème de Kellerer

Résultat 'clef' d'existence (Kellerer, Lowther, Hirsch-Roynette-Yor, Beiglböck-Huesmann-Stebegg, Beiglböck-J.)

Soit μ and ν deux mesures de probabilité. Alors

$$\mu \preceq_C \nu$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists(X, Y), \begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ X = \mathbb{E}(Y|X), \\ x \mapsto \mathbb{E}(Y|X = x) \text{ est un noyau Lipschitz} \end{cases}$$

Une autre étape clef du Théorème de Kellerer

Résultat 'clef' d'existence (Kellerer, Lowther, Hirsch-Roynette-Yor, Beiglböck-Huesmann-Stebegg, Beiglböck-J.)

Soit μ and ν deux mesures de probabilité. Alors

$$\mu \preceq_{C, \text{sto}} \nu$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists (X, Y), \begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ X \preceq \mathbb{E}(Y|X), \\ x \mapsto \mathbb{E}(Y|X=x) \text{ est un noyau Lipschitz.} \end{cases}$$

Par un argument de compacité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}) \dots$

Continuité de la composition markovienne (pour des noyaux Lipschitz)

+

Existence de couples (sous-)martingale à noyau Lipschitz

=

Théorème de Kellerer sur l'existence d'une (sous-)martingale markovienne (à noyaux Lipschitz)

Problème: “ $X \leq Y$ et $x \mapsto \mathbb{E}(Y|X=x)$ Lipschitz”

Exemple

$$\mu = \text{Unif}([0,2]) \preceq_{\text{sto}} \nu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$$

Dans cet exemple, pour (X, Y) avec $X \leq Y$ la loi est connue. C'est

$\frac{1}{2}(\lambda_{|[0,1]} \otimes \delta_1 + \lambda_{|[1,2]} \otimes \delta_2)$. Le noyau $x \mapsto \mathbb{E}(Y|X=x)$ n'est pas continu en $x=1$.

Il est impossible de trouver un noyau Lipschitz.

Un nouveau chemin: les noyaux ‘croissants’

Definition

Le noyau $k : x \in \mathbb{R} \rightarrow k(x; \cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dit croissant si pour toute fonction croissante (bornée) f , la fonction $x \rightarrow \int f(y)k(x; dy)$ est également croissante. Autrement dit $x \rightarrow k(x; \cdot)$ est croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de l'ordre stochastique $\preceq_{\text{sto}}$.

Boubel-J.

Si les marges sont fixes, la composition markovienne est continue pour des chaînes de Markov à noyau croissant.

Boubel-J.

Soit μ et ν deux mesures de probabilité,

$$\mu \preceq_{\text{sto}} \nu$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists (X, Y), \begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ X \leq Y, \\ x \mapsto \mathbb{E}(Y|X=x) \text{ est un noyau croissant.} \end{cases}$$

Démo.

Il suffit de considérer le noyau quantile de μ à ν .

Par un argument de compacité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}) \dots$

Continuité de la composition markovienne (pour les noyaux croissants)

+

Existence de noyaux croissants ‘vers le haut’ pour tout $\mu_s \preceq_{\text{sto}} \mu_t$

=

Théorème d’existence d’un processus croissant markovien (à noyaux croissants)

PCOSs et processus croissants markoviens

Théorème A (Boubel-J. 2017)

Soit $(\mu_t)_{t \geq 0}$ croissante dans l'ordre stochastique. Alors, il existe $(X_t)_{t \geq 0}$ avec

- 1 $X_t \sim \mu_t$ pour tout $t \geq 0$,
- 2 $X_s(\omega) \leq X_t(\omega)$ pour tout $s \leq t$ et tout ω ,
- 3 le processus est markovien.

Complément: trois résultats en un

Soit (μ, ν) tels que $\mu \preceq_{\text{sto}} \nu$ (ou $\preceq_{C, \text{sto}}$ ou $\preceq_C$). Alors il existe (X, Y) tel que

$$\begin{cases} X \sim \mu, \\ Y \sim \nu, \\ (X \leq Y) \text{ (ou } (X \leq \mathbb{E}(Y|X)) \text{ ou } (X = \mathbb{E}(Y|X))), \\ x \mapsto \mathbb{E}(Y|X=x) \text{ est croissant.} \end{cases}$$

Des faits:

- Sous $\mathbb{E}(Y|X) = X$, le noyau $x \mapsto \mathbb{E}(Y|X=x)$ est Lipschitz ssi il est croissant.
- Le couplage (X, Y) tel que $X \leq \mathbb{E}(Y|X)$ construit par Kellerer est à noyau croissant.

Conclusion

Les trois résultats peuvent être démontrés ensemble à l'aide des noyaux croissants.

Complément: “la Markovification”

Si $(\mu_t)_{t \geq 0}$ n'est pas croissant pour $\preceq_{\text{sto}}$, on peut quand même avoir un processus markovien $(X_t)_{t \geq 0}$ à noyaux croissants.

Par un argument de compacité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}) \dots$

Continuité de la composition markovienne (pour les noyaux croissants)

+

Existence de noyaux croissants ~~vers le haut' pour tout~~ $\mu_s \preceq_{\text{sto}} \mu_t$ entre μ_s et μ_t

=

Théorème d'existence d'un processus ~~croissant~~ markovien à noyaux croissants

Markovification

Théorème B – version 1 (Boubel-J. 2017)

Pour tout $(\mu_t)_{t \geq 0}$ il existe un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ qui satisfait à

- 0 Pour tout $t \geq 0$, $X_t \sim \mu_t$,
- 1 $(X_t)_{t \geq 0}$ est markovien,
- 2 pour tout $s \leq t$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Loi}(X_t | X_s = x)$ est un noyau croissant.

De plus tous les (X_s, X_t) pour $s < t$ peuvent être pris comme limites de lois obtenues par les chaines de Markov à noyau quantile sur $[s, t]$.

Il existe une Markovification

Plus généralement, si un processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ est à noyau croissant, il existe $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ qui satisfait à

- 0 Pour tout $t \geq 0$, $\tilde{Y}_t \sim Y_t$,
- 1 $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ est markovien,
- 2 pour tout $s \leq t$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Loi}(\tilde{Y}_t | \tilde{Y}_s = x)$ est un noyau croissant.

De plus tous les $(\tilde{Y}_s, \tilde{Y}_t)$ pour $s < t$ peuvent être pris comme limites de lois obtenues par les chaines de Markov de noyaux extraits de $(Y_t)_{t \geq 0}$ sur l'intervalle $[s, t]$.

Plan de l'exposé

- 1 Le processus quantile
- 2 Intermède
- 3 Une extension du théorème de Kellerer pour $\preceq_{\text{sto}}$
- 4 Équation de transport: à la recherche d'un représentant canonique
- 5 Définition/Construction de la mesure quantile rendue markovienne
- 6 Exemples

Énergie (cinétique) d'une courbe

L'énergie de $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$ dans un espace métrique (X, d) est

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}_t|^2 dt.$$

En particulier

- si $\mathcal{E}(\gamma) < \infty$, la courbe est continue
- si $X = \mathbb{R}^N$, l'énergie est finie ssi $\gamma \in W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)$ (espace des courbes abs. continues d'ordre 2).

Une définition possible

Pour une subdivision $r : \{0 = r_1 < \dots < r_n = 1\}$ donnée on pose

$$\mathcal{E}(\gamma, r) = \sum_k \frac{d(\gamma_{r_k}, \gamma_{r_{k+1}})^2}{r_{k+1} - r_k}.$$

Definition

L'énergie de γ est

$$\mathcal{E}(\gamma) = \lim_{|r| \rightarrow 0} \mathcal{E}(\gamma, r) \in [0, \infty]$$

où $|r|$ est le pas de la subdivision r .

Représentation lagrangienne (Ambrosio-Gigli-Savaré, Lisini)

Soit $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $\mathcal{E}(\mu) < \infty$. Alors il existe $\Pi \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1], \mathcal{X}))$ telle que

- $(e_t)_\# \Pi = \mu_t$ (les bonnes marges),
- $\int \mathcal{E}(\gamma) d\Pi(\gamma) = \mathcal{E}(\mu)$ (énergie moyenne minimale).

Représentation eulérienne $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ (Ambrosio-Gigli-Savaré)

Pour $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$ d'énergie finie, il existe un champs de vecteur $(v_t)_{t \in [0,1]}$ tel que

- $d\mu_t/dt + \operatorname{div}(\mu_t v_t) = 0$ (équation de transport),
- $\int_0^1 \int |v_t|^2 d\mu_t dt = (\mathcal{H})\mathcal{E}(\mu)$ (énergie spacio-temporelle minimale pour $(v_t)_t$).

Les deux représentations pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$

les deux objets optimaux ensemble

Pour Π et $(v_t)_{t \in [0,1]}$ optimaux, l'EDO

$$\dot{\gamma}_t = v_t(\gamma_t)$$

est satisfaite pour presque tout (γ, t) .

À propos de l'unicité

Le champs de vecteur $(v_t)_{t \in [0,1]}$ est unique, mais Π ne l'est pas!

Objectif

Fournir un résultat d'unicité pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

Mesure associée à une subdivision.

Soit $r : \{0 = r_1 < r_2 < \dots < r_n = 1\}$ et $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$. On considère les mesures

$\Pi^{(r)} \in \mathcal{P}(C([0,1], \mathcal{X}))$ telles que pour tout $k \geq 1$,

- $(e_{r_k})_{\#} \Pi^{(r)} = \mu_{r_k}$,
- La courbe aléatoire γ (de loi $\Pi^{(r)}$) restreinte à $[r_k, r_{k+1}]$ minimise l'espérance de l'énergie.

C'est le problème de transport dynamique de Benamou-Brenier sur chaque $[r_k, r_{k+1}]$!

Sur $\mathcal{P}(X)$, la distance est la distance $W = W_X$ du transport sur X , et pour $X = \mathbb{R}$ le transport optimal est donné par le noyau quantile.

$$W^2(\mu_s, \mu_t) = \int_{[0,1]} |G_{\mu_s} - G_{\mu_t}|^2(\alpha) d\text{Leb}(\alpha)$$

et

$$\frac{W^2(\mu_s, \mu_t)}{t-s} = \int_{[0,1]} \int_s^t \left(\frac{|G_{\mu_s} - G_{\mu_t}|}{t-s} \right)^2(\alpha) dr d\text{Leb}(\alpha).$$

Pour une subdivision r donnée et $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu, r) &= \sum_k \int_{[0,1]} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{|G_{\mu_{r_k}} - G_{\mu_{r_{k+1}}}|}{r_{k+1} - r_k} \right)^2(\alpha) dt d\text{Leb}(\alpha) \\ &= \int_C \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2(t) dt d\Pi^{(r)}(\gamma) \end{aligned}$$

- compacité (Prokhorov) $\longrightarrow$ sous-suite convergente vers $\bar{\Pi}$.
- La mesure $\bar{\Pi}$ possède les bonnes marges.
- $\Pi \mapsto \iint |\dot{\gamma}|^2 dt d\Pi$ est sem-continue. En $\bar{\Pi}$ c'est $\mathcal{E}(\mu)$.

Représentation lagrangienne (Ambrosio-Gigli-Savaré, Lisini)

Soit $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $\mathcal{E}(\mu) < \infty$. Alors il existe $\Pi \in \mathcal{P}(C([0,1], \mathcal{X}))$ telle que

- $(e_t)_\# \Pi = \mu_t$ (les bonnes marges),
- $\int \mathcal{E}(\gamma) d\Pi(\gamma) = \mathcal{E}(\mu)$ (énergie moyenne minimale).

De plus Π peut être obtenue comme limite de mesures construites à l'aide d'une suite de subdivisions.

Les mesures $\Pi^{(r)}$ quand $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

- Pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ le transport optimal de μ_{r_k} à $\mu_{r_{k+1}}$ est unique.
- L'interpolation géodésique est assurée par des droites.
- Donc, $\Pi^{(r)}$ est définie univoquement sur chaque $[r_k, r_{k+1}]$.

Pour autant $\Pi^{(r)}$ dépend tout de même de la méthode de composition.

1ère méthode de composition: la composition quantile

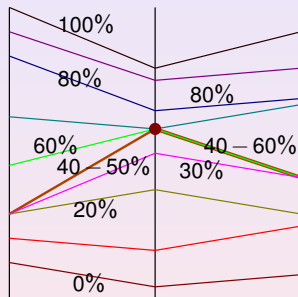


Figure: composition quantile

Des énoncés d'unicité

Existence

Sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, soit $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$ tel que $\mathcal{E}(\mu) < \infty$. La mesure quantile Π_q satisfait à

- ❶ $(e_t)_\# \Pi_q = \mu_t$ (les bonnes marges),
- ❷ $\int \mathcal{E}(\gamma) d\Pi_q(\gamma) \leq \mathcal{E}(\mu)$ (énergie moyenne minimale)

Unicité – version 1

Π_q est l'unique mesure limite (par la méthode des subdivisions) lorsqu'on prend la composition quantile.

Unicité – version 2

Si Π satisfait à ❶ et ❷, alors pour tout $0 \leq s < t \leq 1$

$$F[(e_{s,t})_\# \Pi_q] \geq F[(e_{s,t})_\# \Pi].$$

Problème quand $\mathcal{X}$ est général avec la méthode exposée

Tout d'abord $\Pi^{(r)}$ n'est pas définie de façon univoque car

- le transport optimal n'est pas unique,
- les géodésiques ne sont pas uniques,

mais surtout

- **il n'y a pas de noyau quantile!!**

1ère méthode de composition: la composition quantile

Ne fonction que sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

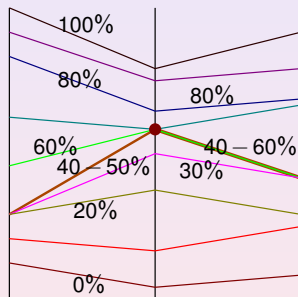


Figure: composition quantile

2ème méthode de composition: la composition markovienne

Fonctionne des les $\mathcal{X}$ généraux.

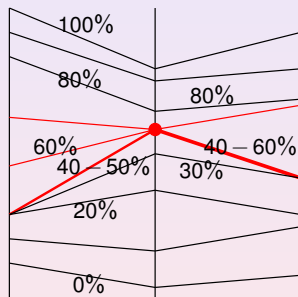


Figure: Composition markovienne

Problème avec les $(\Pi^{(r^n)})_n$

- Il peut y avoir plusieurs limites Π !
- Ces mesures peuvent être ou ne pas être markovienne.

Exemple pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}$

On définit pour $t \in [-1, 1]$ les mesures

$$\mu_t = \begin{cases} \delta_0 & \text{if } t = 0 \\ |2t|^{-1} \lambda_{[-|t|, |t|]} & \text{if } t \neq 0. \end{cases}$$

- Subdivisions contenant 0,
- Subdivisions ne contenant pas 0.

Existence et unicité pour la composition markovienne

Existence (Boubel-J. 2017)

Sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, soit $\mu = (\mu_t)_{t \in [0,1]}$ tel que $\mathcal{E}(\mu) < \infty$. Il existe $\Pi \in \mathcal{P}(C([0,1], \mathbb{R}))$ telle que

- 1 $(e_t)_\# \Pi = \mu_t$ (les bonnes marges),
- 2 $\int \mathcal{E}(\gamma) d\Pi(\gamma) = \mathcal{E}(\mu)$ (énergie moyenne minimale)

De plus cette mesure peut être choisie markovienne.

Théorème C: Unicité – version 3 (Boubel-J. 2017)

Il existe une unique mesure markovienne Π_{mq} qui est obtenue comme limite par la méthode des subdivisions et une composition markovienne.

Peut-on avoir la même chose en dimension ≥ 2 ou pour $\mathcal{X}$?

Question ouverte pour l'unicité comme pour l'existence!

Plan de l'exposé

- 1 Le processus quantile
- 2 Intermède
- 3 Une extension du théorème de Kellerer pour $\preceq_{\text{sto}}$
- 4 Équation de transport: à la recherche d'un représentant canonique
- 5 Définition/Construction de la mesure quantile rendue markovienne
- 6 Exemples

Markovinification

Théorème B – version 1 (Boubel-J. 2017)

Pour tout $(\mu_t)_{t \geq 0}$ il existe un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ qui satisfait à

- 0 Pour tout $t \geq 0$, $X_t \sim \mu_t$,
- 1 $(X_t)_{t \geq 0}$ est markovien,
- 2 pour tout $s \leq t$, $x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Loi}(X_t | X_s = x)$ est un noyau croissant.

De plus tous les (X_s, X_t) pour $s < t$ peuvent être pris comme limites de lois obtenues par les chaines de Markov à noyau quantile sur $[s, t]$.

La mesure Markov-quantile associée à $(\mu_t)_{t \geq 0}$

Theorème B – version 2 (Boubel-J. 2017)

Pour tout $(\mu_t)_{t \geq 0}$, il existe une mesure $\Pi_{mq} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ qui satisfait à

- ❶ Pour tout $t \geq 0$, $(e_t)_\# \Pi_{mq} = \mu_t$ (les bonnes marges),
- ❶ Π_{mq} est markovienne,
- ❷ pour $\Pi_{mq} = \text{Loi}((X_t)_{t \geq 0})$ et tout $s \leq t$,
 $x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Loi}(X_t | X_s = x)$ est un noyau croissant,
- ❸ si Π satisfait à ❶, ❷ et ❸ alors $F[(e_{s,t})_\# \Pi_{mq}] \geq F[(e_{s,t})_\# \Pi]$.

De plus Π_{mq} peut être obtenue comme la limite d'une suite $(\Pi_n)_n$ associée à une suite de subdivisions.

Nouvelle représentation de la composition markovienne

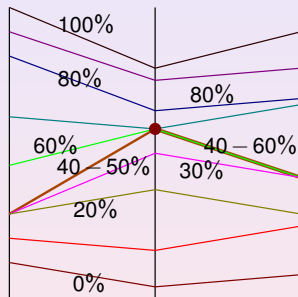


Figure: Composition markovienne

Nouvelle représentation de la composition markovienne

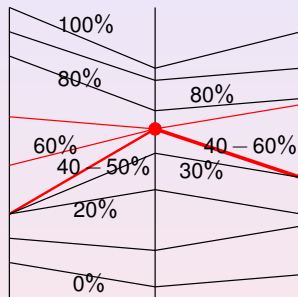


Figure: Composition markovienne

Nouvelle représentation de la composition markovienne

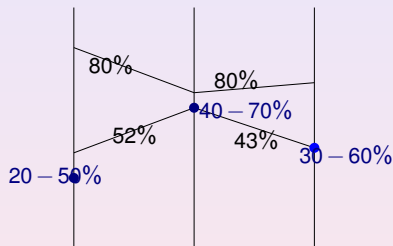


Figure: Composition markovienne

Nouvelle représentation de la compositione markovienne

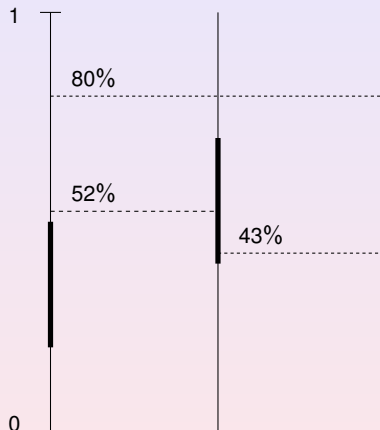


Figure: représentation dans l'espace des niveaux de quantile

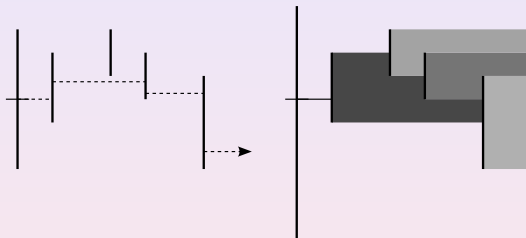
Construction de la loi jointe $(e_{s,t})_{\#}\Pi$.

Figure: Noyau de transition quantile lu dans $[0, 1]$, l'espace des niveaux de quantile.

Une image en noir et blanc



Figure: Un gentil zèbre

Une image en noir et blanc



Figure: Un gentil zèbre

Une image générique

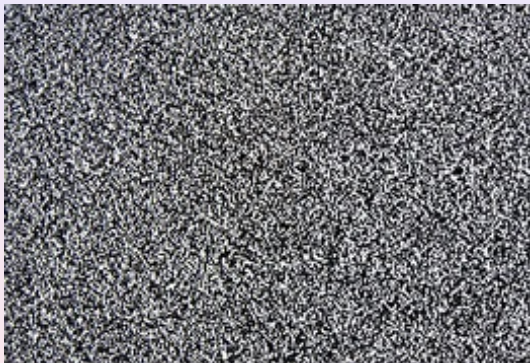


Figure: Tout est possible!

Construction de $(e_{s,t})_{\#}\Pi$. Défini comme un maximum.

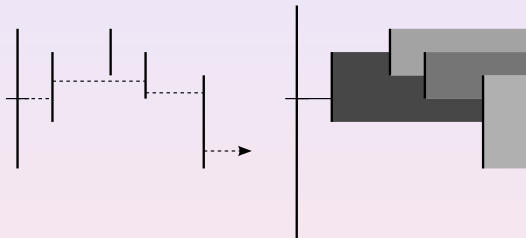
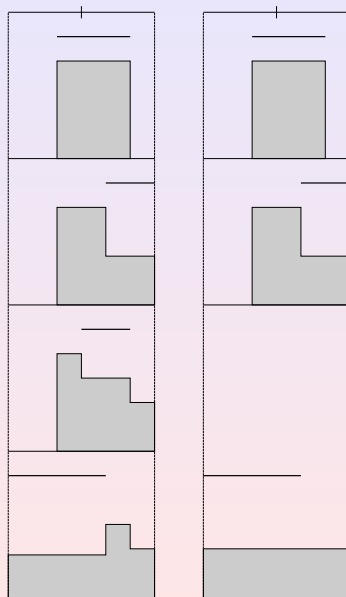
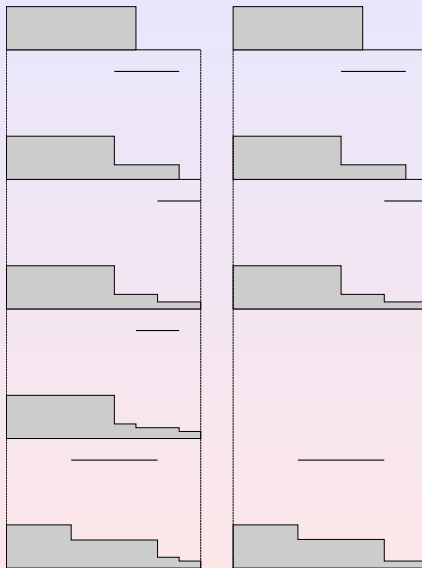


Figure: Trajectoire dans l'espace des niveaux de quantile.





Plan de l'exposé

- 1 Le processus quantile
- 2 Intermède
- 3 Une extension du théorème de Kellerer pour $\preceq_{\text{sto}}$
- 4 Équation de transport: à la recherche d'un représentant canonique
- 5 Définition/Construction de la mesure quantile rendue markovienne
- 6 Exemples

Invariances

- Si le processus quantile Π_m est markovien, alors $\Pi_m = \Pi_{mq}$.
- Le processus Markov-quantile supporte tout les changements de temps continus croissant $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$. (On peut connaitre le processus Markov-quantile de $(\mu_{\varphi(t)})_{t \in [a, b]}$ si on connait celui de $(\mu_t)_{t \in [0, 1]}$)
- Il supporte aussi le passage au temps renversé.

Exemple 0

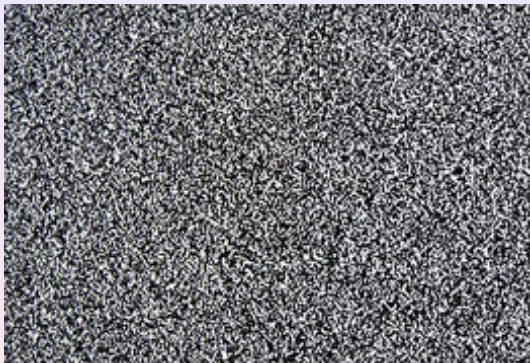


Figure: Tout est possible!

Exemple 1



Figure: Un gentil zèbre

Exemple 2

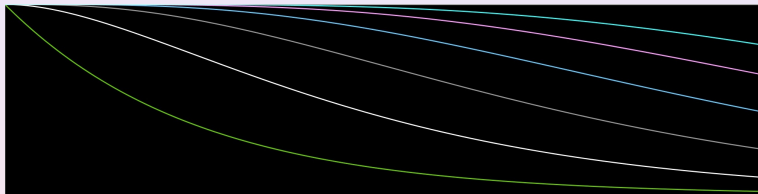


Figure: Mesures atomiques

Exemple 2

Pour tout $t \geq 0$, μ_t est concentrée sur $\mathbb{N}$ et $t \mapsto \mu_t(k)$ est analytique.

On pose $f_k(t) = \sum_{i=0}^k \mu_t(i)$. Le taux de transition vers k est

$$\begin{cases} \max(0, -f'_k(t))/\mu_t(k) & \text{to } k+1 \\ \max(0, f'_{k-1}(t))/\mu_t(k) & \text{to } k-1 \end{cases}$$

- Cela s'applique à $\mu_t = \mathcal{P}(t)$ pour $t \geq 0$. Le processus Markov-quantile associé est le processus de comptage de Poisson.
- Cela s'applique à $\mu_t = \mathcal{B}(n, t)$ pour $0 \leq t \leq 1$. C'est le processus de compage de n points sur $[0, 1]$.

Exemple 3

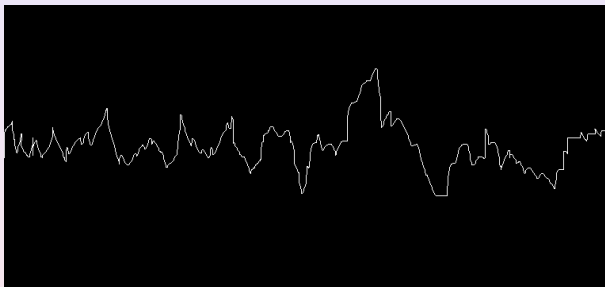


Figure: Interface de non lisse entre deux atomes

Exemple 3

$$\mu_t = f(t)\delta_0 + (1 - f(t))(t)\delta_1$$

Si f est décroissante sur $[t, t + dt]$ la probabilité d'un saut vers le haut est $[f(t) - f(t + dt)]/f(t)$.

Pour le processus Markov-quantile $(X_t)_{t \in [0,1]}$, les variables X_0 et X_1 sont indépendantes si et seulement si f a une variation totale infinie ou $f(t_0)g(t_0) = 0$ pour un instant $t_0 \in [0, 1]$.

Exemple 4

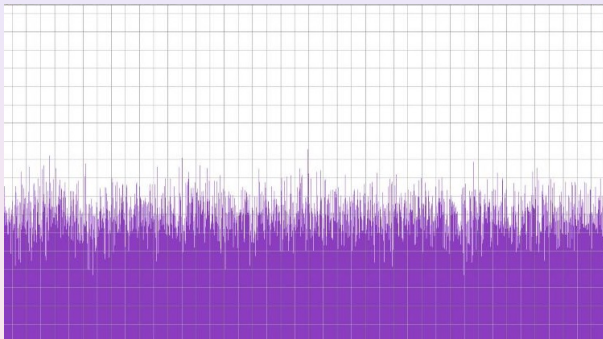


Figure: Mélange '1 atome + partie diffuse'

Exemple 4

$$\mu_t = f(t)\delta_0 + (1 - f(t))\mathcal{U}([8, 12])$$

On cherche la loi de (X_0, X_1) . En posant $\alpha := \sup_{[0,1]} f$, les niveaux de quantiles sont mélangés indépendamment sur $[0, \alpha]$ et identiquement reproduits sur $(\alpha, 1]$.