Proposal for a master thesis in Spring or Summer 2025

Optimal transport: structure and stability

French

Titre Transport optimal, structure et stabilité

Directeur(s) de mémoire Nicolas Juillet `nicolas.juillet@uha.fr`

Unité(s) d'Accueil(s) Département de Mathématiques d'IRIMAS

Établissement de rattachement Université de Haute Alsace (campus de Mulhouse)

Rattachement à un programme Projet ANR SOCOT financé sur 2023–2028 : "Ordres stochastiques et Transport optimal contraint". Une thèse sera financée par ce projet.

Gratification réglementaire

Dans la théorie du transport optimal, au carrefour de l'analyse, des probabilités et d'autres domaines mathématiques, scientifiques ou techniques, on a pris l'habitude d'appeler *plan de transport* entre μ et ν sur E, qui sont deux mesures de probabilité, toute mesure π sur $E \times E$ dont les marges sont μ et ν, c'est-à-dire qui satisfait à $\pi(A \times E) = \mu(A)$ et $\pi(E \times A) = \nu(A)$, pour tout A.

Dans l'ensemble $\Pi(\mu, \nu)$ des plans de transport on distingue certains sous-ensembles :

- Sous-ensemble $\Pi^*(\mu, \nu)$ des *plans de transports optimaux*, c'est-à-dire minimisant une fonctionnelle $F : \Pi(\mu, \nu) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ particulière. La théorie permet de connaître des conditions garantissant $\Pi^*(\mu, \nu) = \{\pi^*\}$ avec en plus une connaissance des caractéristiques de π^*.
- Sous-ensemble $\Pi'(\mu, \nu) \subset \Pi(\mu, \nu)$ des *plans de transport satisfaisant à une contrainte supplémentaire*. Exemples : contrainte martingale [**BJ16**] ou directionnelle [**NuWa21**], contrainte de capacité [**KoMcC15**], contrainte multimarginale [**GaSw98**] ou multi-stochastique [**GlKoZi22**].
- Enfin la combinaison des deux : $(\Pi')^*(\mu, \nu)$ est l'ensemble des solutions du problèmes de minimisation parmi les plans de transport satisfaisant à la contrainte.

Dans ce stage de master on s'attachera à recenser et comprendre des résultats connus sur la stabilité et la structure de ces sous-ensembles.

Stabilité. On désigne ainsi la continuité de l'application g donnant l'ensemble des minimiseurs en fonction des marges

$$g : (\mu, \nu) \longrightarrow (\Pi')^*(\mu, \nu),$$

dans les des cas où $(\Pi')^*(\mu, \nu)$ est un singleton ou non, et en fonction de la contrainte choisie.

Structure. Dans certaines situations les ensembles $\Pi^*(\mu, \nu)$ ou $\Pi'(\mu, \nu)$ peuvent se déduire de familles d'ensembles $\left(\Pi^*(\mu_i, \nu_i)\right)_{i \in I}$ ou $\left(\Pi^*(\mu_i, \nu_i)\right)_{i \in I}$ où les familles $(\mu_i)_{i \in I}$, $(\nu_i)_{i \in I}$ consistent en une décomposition canonique de (μ, ν).

On tiendra compte des goûts et du bagage mathématique de la stagiaire ou du stagiaire dans la définition des objectifs. D'autres sujets sont également envisageables parmi les thèmes du projet SOCOT.

English

Title Optimal transport : structure and stability

Supervisor Nicolas Juillet `nicolas.juillet@uha.fr`

Research Unit Département de Mathématiques d'IRIMAS

University Université de Haute Alsace (campus of Mulhouse)

Research program ANR SOCOT 2023–28 : "Stochastic Orders and Constrained Optimal Transport". A doctoral thesis shall be financed by this program.

Master thesis with gratification

In Optimal Transport Theory a the crossroad of Analysis, Probability and other mathematical subdomains as well as other scientific or technical domains, a probability measure π on $E \times E$ with marginals μ and ν –i.e such that $\pi(A \times E) = \mu(A)$ and $\pi(E \times A) = \nu(A)$ for every A– is called a *transport plan* between μ and ν.

In the set $\Pi(\mu, \nu)$ of transport plans we designate important subsets :

— Subset $\Pi^*(\mu, \nu)$ of the *optimal transport plans*, that is the transport plans $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ that minimize some particular functional $F : \Pi(\mu, \nu) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. The theory provides special conditions on F that guarantee $\Pi^*(\mu, \nu) = \{\pi^*\}$ and gives additional information on π^*.

— Subset $\Pi'(\mu, \nu) \subset \Pi(\mu, \nu)$ of the *optimal transport plans satisfying an additional constraint.* Examples : martingale [**BJ16**] or directional [**NuWa21**] constraint, capacity constraint [**KoMcC15**], multi-marginal [**GaSw98**] or multi-stochastic [**GlKoZi22**] constraint.

— The combination of both : $(\Pi')^*(\mu, \nu)$ is the set of solutions for the minimisation of the transport plans satisfying the constraint.

The aim of this master internship is to gather and understand in depth the results on the stability and structure of these subspaces.

Stability. It is the name given to the continuity and related results of g that maps the marginals to the set of minimizers

$$g : (\mu, \nu) \longrightarrow (\Pi')^*(\mu, \nu),$$

both in the case $(\Pi')^*(\mu, \nu)$ is a single transport plan or not, and depending on the chosen constaint.

Structure. In certain cases the subsets $\Pi^*(\mu, \nu)$ or $\Pi'(\mu, \nu)$ can be deduced from some families $\left(\Pi^*(\mu_i, \nu_i)\right)_{i \in I}$ and $\left(\Pi^*(\mu_i, \nu_i)\right)_{i \in I}$ where the families $(\mu_i)_{i \in I}$, $(\nu_i)_{i \in I}$ consist in a canonical decomposition of (μ, ν).

The candidate's mathematical background and tastes will be taken into account. Other research directions within the framework of the SOCOT project are also possible.

Références

[**BJ16**] M. Beiglböck and N. Juillet. On a problem of optimal transport under marginal martingale constraints. *Ann. Probab.* 44(1), 2016. 1, 2

[**GaSw98**] W. Gangbo and A. Święch. Optimal maps for the multidimensional Monge-Kantorovich problem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51 (1998), pp. 23–45. 1, 2

[**KoMcC15**] J. Korman and R. J. McCann. Optimal transportation with capacity constraints. *Trans. Am. Math. Soc.*, 367(3) :1501–1521, 2015. 1, 2

[**GlKoZi22**] N. A. Gladkov, A. V. Kolesnikov and A. P. Zimin. The multistochastic Monge-Kantorovich problem *J. Math. Anal. Appl.*, (2022). 1, 2

[**NuWa21**] M. Nutz and R. Wang. The Directional Optimal Transport. *Ann. Appl. Probab.* 32(2) : 1400-1420 (2022). 1, 2