Le groupe de Heisenberg et le repère cc-sphérique,
découverte d'un espace métrique singulier

Nicolas Juillet
Université Joseph Fourier (Grenoble 1),
Institut Fourier

Cet article explique l'intérêt d'approfondir la connaissance des *sphères* pour repérer mathématiquement les *espaces*. Le propos sera agrémenté de la présentation d'un problème classique de la géométrie antique : le problème isopérimétrique. Nous présenterons aussi le groupe de Heisenberg, un espace métrique qui constitue un sujet d'étude passionnant de la géométrie contemporaine. Au cours des deux dernières parties nous verrons comment le sujet antique vient à l'aide de l'étude moderne alors que cette dernière interroge le problème antique.

Problème isopérimétrique et problème de Didon

Le *problème isopérimétrique* peut s'énoncer ainsi:

Parmi les courbes fermées de longueur l, trouver celle qui borde le domaine de plus grande surface.

On comprend aisément le qualificatif *isopérimétrique* donné à cet énoncé. On considère en effet ici des figures géométriques de même périmètres (*iso*-). La solution du problème isopérimétrique[1] est donnée par les cercles de rayon $l/(2\pi)$ (on a bien comme périmètre $2\times\pi\times$rayon$=l$).

Comparons en guise d'illustration les aires des cercles et carrés de périmètre l. La surface du carré est $(l/4)\times(l/4)=l^2/16$. Le disque circonscrit par un périmètre l a quant à lui une surface valant $\pi\times(l/(2\pi))^2=l^2/(4\pi)$ (c'est π fois le rayon au carré). La figure 1 représente un cercle et un carré de même périmètre.

[1] Les Grecs connaissaient la solution de ce problème. Cependant les premières *démonstrations mathématiques* n'apparurent qu'au XIX^e siècle (sous des hypothèses variables).

Le problème de Didon

Une des plus belles traces du savoir antique sur le problème isopérimétrique est sans doute la légende de Didon que l'on peut lire dans l'ouvrage de Virgile, l'Énéide. L'auteur retrace l'épopée de cette princesse phénicienne qui, condamnée à l'exil par son frère Pygmalion, fonda la ville côtière de Carthage. On apprend comment Didon obtint des autochtones l'autorisation de s'installer sur la surface que pouvait délimiter la peau d'un bœuf. La ruse de Didon consista à transformer cette peau de bœuf en une longue corde (en découpant celle-ci en lanière) et à élargir au maximum le domaine compris entre la corde et la côte maritime. On rencontre alors une variante du problème isopérimétrique[2].

Ce que ne dit pas le poète mais peut-être uniquement l'étude du site archéologique est la disposition retenue par Didon : faire décrire un demi-cercle à la corde. Nous allons démontrer que ce choix est optimal. On comprendra mieux le raisonnement à l'aide de la figure 2 où ont été représentées deux cordes de même longueur. On considère dans un premier temps une courbe quelconque (verte ici) reliant un point de la côte à un autre point. Prolongeons ensuite cette courbe en l'attachant à la courbe qui décrit sur la mer, par rapport au rivage, une trajectoire symétrique à la frontière terrestre. On est donc en présence d'une courbe fermée de longueur fixée qui entoure un territoire (terrestre et marin) dont la surface est le double de la surface terrestre que l'on souhaite rendre la plus grande possible. On reconnaît alors le problème isopérimétrique et peut déduire que la meilleure façon consiste à disposer la corde de bœuf en demi-cercle afin qu'elle forme, avec son double virtuel un cercle et optimise de ce fait la surface circonscrite. Comme on l'a vu précédemment, c'est en effet ainsi qu'on obtient la plus grande surface.

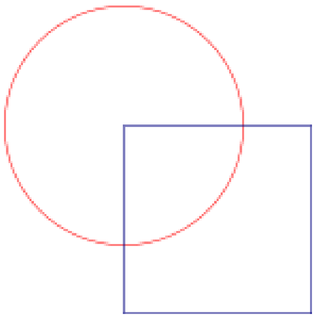
Espaces métriques, espaces de longueur

La notion d'*espace métrique* a été introduite en 1906 par un mathématicien français, Maurice Fréchet. Il s'avère nécessaire d'introduire une définition abstraite pour désigner les espaces de points pour lesquels

---

2 Voici l'extrait correspondant dans l'Énéide (ligne 365):

Deuenere locos, ubi nunc ingentia cernis
moenia surgentemque nouae Karthaginis arcem,
mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.



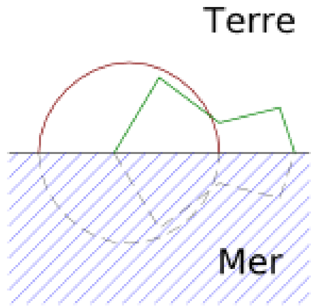


Figure 1 (g.) : Deux courbes fermées de même longueur.
Figure 2 (d.) : Deux configurations de corde pour le problème de Didon

on dispose pour ainsi dire d'une « table des distances » sur le modèle de celles qu'on trouve dans les atlas routiers. À la fin de cette partie on précisera quelques exemples d'espaces métriques concrets.

Sans la donnée issue de la « table des distances », les espaces sont seulement un ensemble de points isolés sans notions géométriques de proximité entre eux, sans notion d'alignement, de milieu, de forme ou de voisinage. Ces notions apparaissent cependant en introduisant une *distance*, le terme mathématique pour désigner la table des distances que nous évoquions avec l'image de la carte routière. On note le plus souvent les distances par d et l'écriture $d(x,y)$ désigne la distance numérique entre la ville x et la ville y (en mathématique on parle plutôt de *points* x et y). Il est important de remarquer qu'on peut attribuer à un même espace, prenons l'espace des villes sur une carte routière, des distances différentes. Par exemple la distance à vol d'oiseau est une distance, la longueur du chemin le plus court est une distance. Le temps nécessaire pour aller d'une ville à une autre est aussi une distance. Pour certaines cartes la différence d'altitude entre deux villes peut encore être une distance.

La définition mathématique de distance n'exige que peu de choses :

- Une distance $d(x,y)$ est une quantité positive ou nulle,
- la distance entre deux villes différentes est non-nulle et $d(x,x)=0$,
- la distance est une quantité symétrique à savoir $d(x,y)=d(y,x)$.

On suppose ainsi qu'il est aussi court d'aller de x à y que de y à x.

- On a enfin pour tout groupe de trois points x,y et z la relation $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$. Elle s'interprète ainsi : il est plus court d'aller directement de x à z que d'aller de x à y puis de y à z.

Nous allons, dans la suite de ces notes, introduire le groupe de Heisenberg, un espace métrique assez étrange mais qui pour autant possède une distance construite sur un mode naturel. Il s'agit en effet d'un *espace métrique de longueur.*

Espaces métriques de longueur

Dans les *espaces métriques de longueur* (ou *espaces de longueur*) la distance est intimement liée à une *longueur.* Précisons tout d'abord que tandis que l'on parle de distance *entre deux points*, la longueur est la longueur *d'une courbe* ou *d'un chemin* (courbe et chemin désignent la même chose). Considérons ainsi que l'on dispose d'une longueur pour les courbes (vérifiant des hypothèses que nous ne préciserons pas). La distance de x à y de notre espace de longueur sera ici définie comme la longueur du plus court chemin entre x et y. Toute l'interrogation sur la distance est par conséquent transposée à la *longueur* que l'on choisit. Avant de présenter trois exemples classiques, remarquons que la plupart des espaces métriques précédemment cités étaient déjà des espaces de longueur. Ainsi sur notre carte routière la distance « temps nécessaire pour aller d'une ville à une autre » dérive de la longueur « durée du parcours » attribuée à chacun des chemins. La distance considérée est bien le minimum de cette durée sur tous les chemins disponibles.

Trois exemples d'espaces de longueur

Tout écolier connaît le premier exemple : il s'agit du plan d'Euclide avec ses triangles, cercles, médiatrices... C'est aussi l'espace du problème isopérimétrique et de celui de Didon, présentés auparavant. En guise de définition pour la longueur des courbes on se contentera de celle qu'on pourrait donner intuitivement : la longueur d'une ficelle non-élastique qui suit la courbe à mesurer. On sait aussi qu'entre deux points, en tirant sur la ficelle on obtient un segment de droite, le chemin de longueur minimum entre les deux extrémités. On retrouve alors la distance usuelle du plan : c'est la longueur du segment reliant deux points. On notera le plan euclidien $(\mathbf{R}^2, d_{R2})$ ou $\mathbf{R}^2$ est le plan et d_{R2} la distance euclidienne.

Sur le même modèle présentons $(\mathbf{R}^3, d_{R3})$, l'espace euclidien (ici « espace » prend le sens spécifique d'espace à trois dimensions par opposition au plan qui lui, a deux dimensions). La longueur d'un chemin est aussi donnée par celle d'un fil épousant sa trajectoire et le chemin le plus court est encore le segment de droite.

Le dernier exemple est la sphère $\mathbf{S}^2$ qu'on peut se représenter comme une planète, par exemple la Terre avec ses distances à vol d'oiseau. Pour des raisons d'échelle prenons plutôt la représentation d'un globe terrestre. La longueur d'une courbe dessinée sur la mappemonde sera de nouveau la longueur d'une ficelle suivant le contours. La question du chemin le plus court est ici plus intéressante. On peut démontrer que les chemins les plus courts de $\mathbf{S}^2$ sont les portions de *grand cercle* où ces-derniers sont définis comme l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre de la Terre (la séparant en deux parties égales). Ainsi les méridiens sont-ils des grands cercles, l'équateur en est un, mais les parallèles (45° de latitude, tropiques, cercles polaires) n'en sont pas. Pour aller de Naples à New York, deux villes placées sur le même parallèle, un avion voulant faire au plus court effectuera la trajectoire d'un grand cercle en se rapprochant tout d'abord du pôle Nord puis devra à mi-parcours se rapprocher de nouveau de l'équateur. On pourra s'en assurer à l'aide d'une ficelle.

Repères sphériques

Les espaces métriques de longueur ont l'avantage de disposer de repères naturels que l'on nomme usuellement repères sphériques ou polaires. Il convient avant tout de préciser que ce que l'on entend par *sphère* est, pour les espaces métriques généraux, plus que la simple sphère $\mathbf{S}^2$ présentée précédemment. Dans un espace métrique ($\mathbf{M}$,d), une *sphère* est, pour un centre donné x et un rayon r, l'ensemble des points dont la distance à x est r (c'est-à-dire l'ensemble des points y tels que $d(x,y)=r$). Les sphères du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ sont donc les cercles, et $\mathbf{S}^2$ est une sphère de $\mathbf{R}^3$ (c'est l'ensemble des points à une distance 1 de (0,0,0)).

Le repérage sphérique du point x dans l'espace ($\mathbf{M}$,d) procède ainsi :

i. On se donne une origine o (c'est un point de $\mathbf{M}$),
ii. on pose r la distance de o à x (donc $r=d(o,x)$),
iii. on considère le chemin le plus court de o à x que l'on prolonge infiniment : ce sera le *rayon*. Il sera repéré par un paramètre s, par exemple en considérant le point de rencontre entre le *rayon* et la sphère de centre o et rayon 1.
iv. Le point x sera alors repéré dans le repère sphérique par les *coordonnées sphériques (r,s)*.

Parfois le point s de la sphère nécessite à son tour un repérage. C'est ce que nous allons voir en décrivant les repères sphériques pour les trois espaces, exemples de la deuxième partie.

Pour $\mathbf{R}^2$, on prend comme origine le point de coordonnées (0,0) et trace le cercle de rayon 1 (c'est une sphère). Les chemins les plus courts partant de (0,0) sont des segments de droite. On repère alors les points de $\mathbf{R}^2$ par la longueur r de ces segments et par le point d'intersection s de leurs prolongements avec le cercle. Concrètement s sera un angle entre 0° et 360° : l'angle entre le segment et l'axe des abscisses. Le repère sphérique ainsi construit porte dans $\mathbf{R}^2$ le nom familier de *repère polaire*.

Avant de traiter $\mathbf{R}^3$, nous allons voir comment $\mathbf{S}^2$ est repérée. On distingue comme origine un point N (le pôle Nord). De ce point N on conduit tous les chemins menant au plus court à un autre point du globe. On trouve ainsi les rayons de $\mathbf{S}^2$: ce sont les (demi)-méridiens. Dès lors, tout point du globe est repéré par le méridien sur lequel il se trouve (la longitude) et la distance à parcourir sur ce méridien en partant du pôle Nord (la latitude). On reconnaît de fait en la latitude le paramètre r de notre repère sphérique et en la longitude le paramètre s de notre sphère. A chaque méridien il ne correspond en effet qu'un seul point de ce parallèle particulier qu'est la sphère de centre N (le pôle Nord) et de rayon 1.

Présentons maintenant le repère sphérique de $\mathbf{R}^3$. C'est le repère sphérique à proprement parler. De la même façon que la sphère $\mathbf{S}^2$ a donné son nom à la notion de sphère d'un espace métrique, le repère sphérique de $\mathbf{R}^3$ est la référence. On se fixe comme origine le point de coordonnées (0,0,0) et on considère les rayons qui en partent. Il s'agit des demi-droites d'origine (0,0,0). Comme dans $\mathbf{R}^2$, les segments sont en effet les chemins les plus courts. Dans le repère sphérique un point est ainsi repéré par une demi-droite d'une part et par la distance à (0,0,0) d'autre part, *i.e.* par la longueur à parcourir sur cette demi-droite en partant de (0,0,0). Il ne reste qu'une précision à donner : de quelle façon repère-t-on les demi-droites en question? La réponse va nous permettre de réinvestir nos connaissances : on attribue à un rayon les coordonnées du point qu'il rencontre sur $\mathbf{S}^2$, la sphère de rayon 1 centrée en (0,0,0). Le plus souvent la coordonnée s sera donc un couple de variables numériques, une latitude et une longitude comme décrit au paragraphe précédent.

Le groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg[3] est le nom donné à l'espace à trois

[3] Au sujet de Werner Heisenberg, on pourra consulter l'article de A.B dans ce même volume.

dimensions, $\mathbf{R}^3$ muni d'une distance particulière, différente de la distance euclidienne d_{R3} considérée jusqu'à présent. En effet comme on l'a précisé avec l'exemple de la carte routière, un espace métrique peut être muni de nombreuses distances différentes. Celle qui nous intéresse ici est appelée distance de Carnot-Carathéodory, du nom de deux mathématiciens. Nous la noterons d_{cc} et la désignerons sous le nom de *cc-distance*. Tout comme l'espace euclidien, le groupe de Heisenberg, c'est-à-dire donc $(\mathbf{R}^3,d_{cc})$ est un espace de longueur. On s'intéressera aussi prioritairement à la définition de la *cc-longueur*, la longueur des chemins pour cet espace. En ce qui concerne les notations, le couple $(\mathbf{R}^3,d_{cc})$ sera désigné par **H** et on parlera de *repère cc-sphérique* pour le repère du groupe de Heisenberg.

Dans le groupe de Heisenberg il existe deux types de chemins : les chemins *admissibles* et les autres. La cc-longueur d'un chemin non-admissible est infinie ce qui pratiquement signifie que le chemin le plus court d'un point à un autre est toujours une courbe admissible. Pour les décrire rapidement, les courbes admissibles sont les courbes de l'espace à trois coordonnées dont la troisième coordonnée (nous dirons le niveau) évolue identiquement à l'aire algébrique balayée par la courbe planaire constituée des deux premières coordonnées (nous dirons l'ombre de la courbe). Sur la figure 3, on a représenté une courbe admissible en rouge, son ombre en marron (en terme mathématique sa projection verticale sur $\mathbf{R}^2$). On peut observer comment sur la courbe admissible, les différences de niveaux correspondent à l'aire balayée par un segment reliant (0,0) à un point mobile évoluant sur l'ombre de la courbe. En particulier la différence de niveau entre les deux extrémités vaut l'aire coloriée en bleu.

<u>Définition A</u> : La *cc-longueur* d'une courbe admissible est définie comme étant la longueur (au sens usuel) de l'ombre de cette courbe.

Pour apprécier le repère cc-sphérique, il nous faut essentiellement effectuer deux tâches: premièrement nous allons déterminer les chemins les plus courts de **H**, ensuite nous verrons dans la seconde partie comment repérer les rayons partant de (0,0,0) et de façon équivalente comment repérer la sphère du groupe de Heisenberg.

Les chemins les plus courts du groupe de Heisenberg

Nous allons traiter le problème dans un cas particulier, celui de deux points dont les ombres coïncident. À la fin de cette partie on présentera le résultat général et on le justifiera.

Considérons donc tout d'abord deux points dont l'ombre est le même point du plan mais qui se situent à des niveaux différents. Les courbes

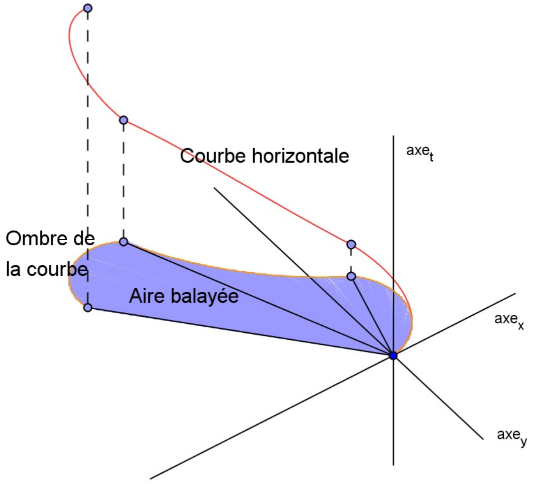
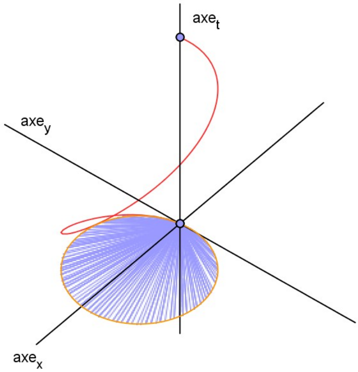


Figure 3 : Une courbe admissible et son ombre

admissibles qui relient ces deux point ont ainsi pour ombres des courbes fermées. La différence de niveau entre les points vaut alors l'aire entourée et la cc-longueur de la courbe est la longueur de l'ombre. En voulant découvrir le chemin le plus court on rencontre donc de nouveau le problème isopérimétrique ou, tout du moins une version duale de celui-ci. Chercher la courbe admissible de longueur la plus courte qui relie les deux points revient donc à considérer les ombres de courbes admissibles qui, d'une part sont fermées et d'autre part entourent une aire valant la différence des niveaux. On veut ici minimiser le contour d'une courbe fermée pour une aire entourée fixe et non plus maximiser l'aire pour une longueur donnée. Cependant, tout comme pour le problème isopérimétrique direct la solution est donnée par des cercles[4]. La figure 4 présente donc la façon la plus courte de relier deux points disposés « l'un

4 Voyons pourquoi : supposons par l'absurde que l'on puisse trouver une courbe plus courte qu'un cercle donné mais qui entoure la même surface. Alors quitte à grossir la figure, par dilatation, on peut renormaliser la courbe afin que la longueur soit égale à celle du cercle. Or en effectuant cette mise à l'échelle la surface de notre figure est désormais supérieure à celle entourée par le cercle. Ceci est formellement en contradiction avec notre connaissance de l'isopérimétrie et prouve que notre hypothèse de départ (on peut enserrer une même aire que le cercle avec un périmètre plus petit) était fausse.

au dessus de l'autre »[5]. De plus, la courbe admissible représentée est aussi la plus courte à relier les points intermédiaires de cette même courbe.



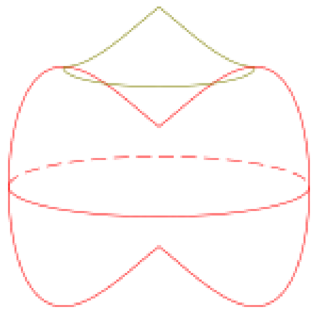


Figure 4 (g.) : Changer de niveau, au plus court.
Figure 5 (d.) : Une sphère du groupe de Heisenberg

Les portions correspondant de la courbe rouge appartiennent donc aux *chemins les plus courts* entre deux points de **H**. Remarquons que les ombres de ces chemins forment des arcs de cercle. Par un raisonnement de type « Didon » on peut en fait démontrer le résultat suivant :

Proposition B : Les *chemins les plus courts* du groupe de Heisenberg sont exactement les courbes admissibles dont l'ombre décrit un arc de cercle.

La sphère du groupe de Heisenberg

Nous allons ici décrire la sphère du groupe de Heisenberg centrée en (0,0,0) de rayon 1 et l'apprécier dans différents contextes. Cette sphère qui a l'allure d'une pomme est représentée en rouge par une coupe verticale, à la figure 5. La définition de sphère indique que les points rouges sont à cc-distance 1 de (0,0,0). Il y a donc (proposition B) des courbes admissibles dont l'ombre est un arc de cercle reliant (0,0,0) aux points de la sphère. Ces arcs de cercle sont à leur tour de longueur 1 et partent de

[5] Il y a en fait une infinité de façons de relier au plus court ces deux points, correspondant chacune à un cercle de même rayon mais disposé différemment.

(0,0) (définition A). Repérer un point de la sphère revient donc à repérer un arc de cercle de longueur 1. Nous allons voir qu'il suffit de deux paramètres numériques à cela. Le premier peut s'apparenter à une longitude : en opérant une rotation centrée en (0,0) on conserve en effet un arc de cercle de longueur 1. Cette longitude est donc un premier paramètre sphérique s_1. Le second paramètre, s_2 sera un angle relatif à l'ouverture de l'arc de cercle. Pour un cercle entier, l'angle s_2 vaudra 360° ou -360° degrés selon le sens de rotation. S'agit-il un demi-cercle? L'angle s_2 sera 180° ou -180°. Si s_2 vaut 0, on aura alors un segment de droite, *i.e* un arc de cercle dégénéré. À titre d'exercice, on pourra essayer d'identifier sur la figure 5 les points correspondant aux diverses valeurs de s_2.

En géométrie moderne le problème isopérimétrique classique s'est vu transposé en toute généralité aux espaces métriques. Cependant dans ce cadre plus vaste il convient de généraliser les notions de périmètre et de surface. Ainsi dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, l'aire surfacique remplace le périmètre tandis que le volume du corps limité par cette surface remplace l'aire des figures considérées auparavant. Sur $\mathbf{S}^2$, les notions de périmètre et de surface gardent une signification presque identique. Pour tous ces espaces on connaît les solutions du problème isopérimétrique qui sont très simples à décrire : il s'agit en effet des sphères. Le problème isopérimétrique du groupe de Heisenberg est une question très débattue dans une branche actuelle des mathématiques, la théorie géométrique de la mesure. Les solutions de ce problème ne sont que partiellement connues. Plus précisément on sait que certaines surfaces appelées par certains *bulles de Heisenberg* sont optimales sur une classe restreinte de surfaces. L'objectif actuel est de montrer qu'elles sont aussi solutions du problème lorsqu'on considère la classe des surfaces dites *à périmètre fini*.

D'après ce qui précède les principaux candidats à être solution du problème isopérimétrique dans un espace sont les sphères de ce dernier. Pour **H**, on peut aisément s'apercevoir que les sphères ne sont pas isopérimétriques. En effet en retournant, comme à la figure 5, une des parties rentrantes de la surface, on ne modifie pas la mesure de cette dernière. Or, le volume, lui est élargi, ce qui montre bien que pour un même périmètre il existe des surfaces bornant des volumes plus larges.

Les sphères de $\mathbf{R}^3$ telles que $\mathbf{S}^2$ ne sont pas non plus isopérimétriques pour **H**. En effet tout comme la longueur, les notions d'aire et de volume sont des notions métriques, c'est-à-dire que dans un espace métrique elles dérivent du choix de la distance, ici d_{cc}. On pourrait parler de cc-aire et de cc-volume. Ainsi les problèmes isopérimétriques sont-ils différents dans **H** et $\mathbf{R}^3$. On assiste cependant à une coïncidence : le cc-volumes et le volume de $\mathbf{R}^3$ sont les mêmes, seules les aires diffèrent.