Dans ce cas le plan de transport est de type Monge.

Rq2 $\partial_c \Psi$ est toujours c cycl^t monotone.

Rq3 Si c est continue, supp c = {le + petit fermé de masse 1} est c-cycl^t monotone.)

(iii) Si $c \leqslant c_X \oplus c_Y$, avec $c_X \in L^1(\mu)$, $c_Y \in L^1(\nu)$, alors le pb dual admet une sol.

(Rq Si $X = Y$ et $c =$ distance, la val. du pb dual est
$$\sup_{\Psi \text{ 1-lip}} \left(\int \Psi d\mu - \int \Psi d\nu\right)$$

Nicolas JUILLET — Le 31 mars 2022, 13^{30}

Le pb de Monge-Kantorovitch sur $\mathbb{R}$

pour μ, ν généraux et $c(x,y) = |x-y|^p$, $p > 1$

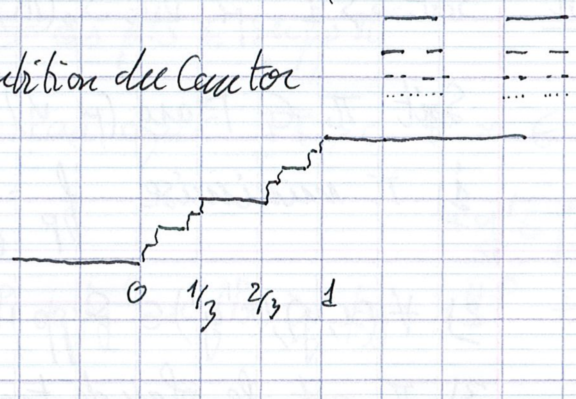
(Coût convexe)

I Rappels

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

Déf La fonction de répartition de μ est
$$F_\mu : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ s \longmapsto F_\mu(s) = \mu(]-\infty, s]) \end{array}$$
($\mathbb{P}(X \in]-\infty, s])$ pour une v.a. ; $\int_{-\infty}^{s} f$ si μ a une densité)

⚠ Escalier du diable = fonction de répartition du Cantor ($f = 0$ pp.)



$$F_\pi = \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0\ 1] \\ (s,t) \longmapsto \pi(]-\infty, s] \times]-\infty, t]) \end{array}$$

Prop Les fns de répart° caractérisent μ et π.

Déf $\mathrm{Supp}\,\pi = \overline{\cup \{O \text{ ouvert} ;\ \pi(O) = 0\}}$ (complémentaire)

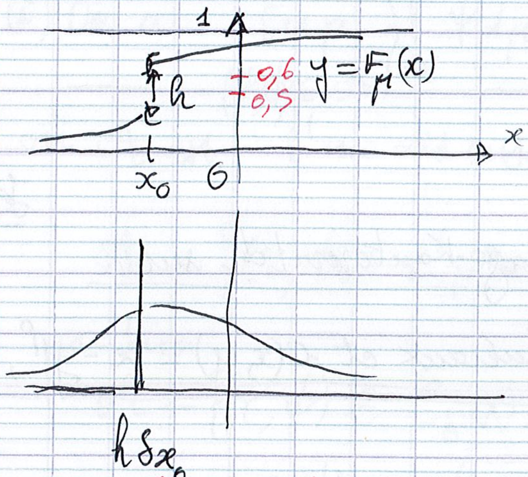
$= \cap \{\text{fermés } F ;\ \pi(F) = 1\}$

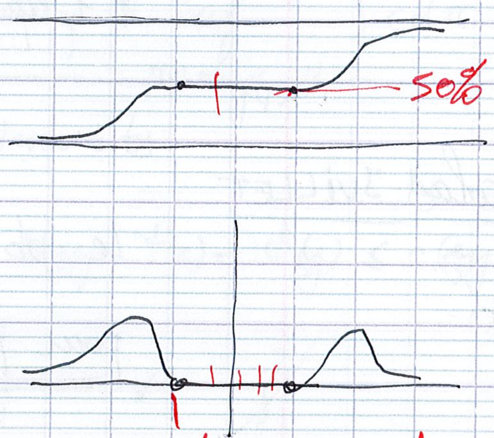
$=$ le plus petit fermé de mesure pleine.

existe car $\mathbb{R}$ est à base dénombrable donc c'est une $\cap^\circ$ sur des rationnels.

Prop $\forall (x,y) \in \mathrm{Supp}\,\pi$ $\forall O$ ouvert $(x,y) \in O \Rightarrow \pi(O) > 0$

Ex





$F^{-1}(0,5) = F^{-1}(0,6)$

quantile : $F_\mu^{-1}(0,5) = \inf(\text{possibles})$

$F_\mu^{-1}(\alpha) = \inf \{ s \in \mathbb{R} ;\ F_\mu(s) \geq \alpha \}$ (souvent = l'unique s tq $F_\mu(s) = \alpha$ mais pas tjs)

Th Soit $p \geq 1$ $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}) := \{ \eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ;\ \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\eta(x) < \infty \}$

Soit $\pi \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$. Alors sont $\Leftrightarrow$:

1) π minimise $f_p = \begin{array}{l} \pi \longmapsto \int |y-x|^p \, d\pi \\ \in \mathrm{Marg}(\mu,\nu) \end{array}$

2) $\forall (x,y), (x',y') \in \mathrm{Supp}\,\mu$, $x < x' \Rightarrow y \leq y'$

3) π est le plan de transport quantile i.e.

Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$\pi = \left(F_\mu^{-1}, F_\nu^{-1}\right)_\# \mathcal{L}^1([0,1])$$

ou $]0,1[$

__Preuve__ Montrons $\emptyset \subsetneq \{\pi \text{ vérifiant } 1)\} \subseteq \{\pi \text{ vérifiant } 2)\} \subseteq \{\text{le } \pi \text{ vérifiant } 3)\}$

a) b) c)

a) cf exposés précédents

c semi cont infᵗ

Comme $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p \mathbb{R}$ on a $\min_\pi \int |y-x|^p d\pi \leq \int 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y)$

$$= 2^{p-1}\left(\int |x|^p d\mu + \int |y|^p d\nu\right)$$

b) Soit π vérifiant 1) $x_0\, y_0\, x_0'\, y_0' \in \operatorname{supp} \pi$

tels que $x_0 < x_0'$ et supposons par l'absurde $y_0' < y_0$

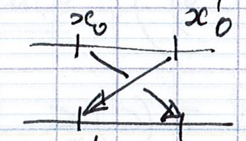
Comme $u \mapsto |u|^p$ est strictᵗ convexe et $\partial_{1,2} c < 0$

$$y \mapsto g_{x_0, x_0'}(y) := |y - x_0'|^p - |y - x_0|^p = \int_{x_0}^{x_0'} \partial_1 c(u,y)\, du$$

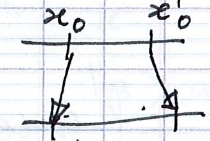
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \int \partial_{1,2} c < 0 \text{ donc } g(y_0') > g(y_0)$$

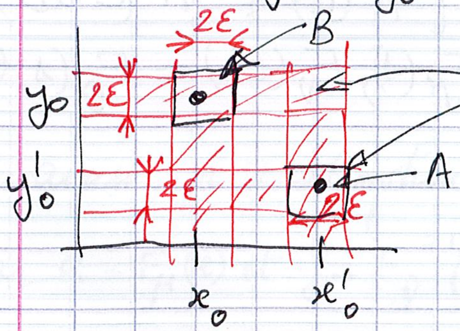
donc $|y_0 - x_0|^p + |y_0' - x_0'|^p > |y_0 - x_0'|^p + |y_0' - x_0|^p$

__bref__ =



a mieux =





ces pts $\in \operatorname{supp} \pi$

Par cont $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

$y' \in [y_0' - \varepsilon, y_0' + \varepsilon]$

$$|y-x|^p + |y'-x'|^p \geq |y-x'|^p + |y'-x|^p + \varepsilon$$

Soit $m = \min(\pi(A), \pi(B)) > 0$ et soit

$$\pi' = \pi - m\left(\frac{\pi \llcorner A}{\pi(A)} + \frac{\pi \llcorner B}{\pi B}\right) + m\left(\frac{\mu \times \nu \llcorner A}{\mu \times \nu(A)} + \frac{\mu \otimes \nu \llcorner B}{\mu \times \nu(B)}\right)$$

On a $\pi' \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$ mais $\int c\, d\pi' < \int c\, d\pi$

en contradiction avec π optimale.

c) Soit π vérifiant 2). Calculons F_μ et F_θ, où
$\theta := F_\mu^{-1} F_\nu^{-1} {}_\# \mathcal{L}^1$

$$F_\theta\, s\, t = \theta(]-\infty, s] \times]-\infty, t]) = \mathcal{L}^1(\{\alpha \in [0,1] ; F_\mu^{-1}(\alpha) \leq s \text{ et } F_\nu^{-1}(\alpha) \leq t\})$$

$$= \mathcal{L}^1(\{\alpha \in]0,1[; \alpha \leq F_\mu(s) \text{ et } \alpha \leq F_\nu(t)\})$$

$$= \min(F_\mu(s), F_\nu(t)) = \min(F_\theta(]-\infty, s] \times \mathbb{R}), F_\theta(\mathbb{R} \times]-\infty, t]))$$

car $\theta \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$

Soit $A =]-\infty, s] \times [t, +\infty[$

$$\left.\begin{aligned} B &= [s, +\infty[\times]-\infty, t] \\ C &=]-\infty, s] \times]-\infty, t] \end{aligned}\right\} \Rightarrow C \cup B = \mathbb{R} \times]-\infty, t]$$

Comme on ne peut pas avoir $\pi(A)$ et $\pi(B) > 0$
(car π satisfait 2))

l'une des inégalités $\begin{cases} \pi(C) \leq \pi(C \cup A) \\ \pi(C) \leq \pi(C \cup B) \end{cases}$ est une $=$

donc $F_\pi(s, t) = \min(F_\mu(s), F_\nu(t)) = F_\theta(s, t)$