$$= \sum d_i |x_i|^2 - \sum_{j,k} d_j d_k \langle x_j | x_k \rangle$$

$(j = k,\ j > k,\ j < k)$

$$= \sum (d_i - d_i^2) |x_i|^2 - 2 \sum_{j<k} d_j d_k \langle x_j | x_k \rangle$$

d'où $\displaystyle C_{\vec{d}}(\vec{x}) = \sum_i d_i \Big| x_i - \sum d_j x_j \Big|^2$

$$= \sum_i (d_i - d_i^2) |x_i|^2 + \tilde{C}_{\vec{d}}(\vec{x}) - (n-1) \sum_i d_i |x_i|^2$$

$$= \tilde{C}_{\vec{d}}(\vec{x}) + \sum_i (d_i - n d_i^2) |x_i|^2$$

Nicolas JUILLET — le 27 avril 2022, $13^{\underline{30}}$

Suite du 27-01-22 sur la concentration de mesure (pp. 32-36)

Rappels $(\mathcal{X}, d, \nu)$ esp métrique probabilisé

Déf $p \geq 1$, $c > 0$ $\mathcal{X}$ satisfait $T_p(c)$ si

$$\forall \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad W_p(\mu, \nu) \leq \sqrt{C \, \mathrm{Ent}(\mu, \nu)}$$

$$W_p(\mu,\nu) = \left(\inf_{\pi \nearrow \nu \searrow \mu} \int d(x,y)^p \, d\pi(x,y) \right)^{1/p}$$

$$\mathrm{Ent}(\mu,\nu) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d\nu}{d\mu} \ln \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu \\ +\infty \text{ si } \nu \text{ pas abs}^{t} \text{ cont p/r à } \mu. \end{cases}$$

On a vu : 1) $T_2(C) \Rightarrow T_1(C)$ car $W_1 \leq W_2$

2) Si $\mathcal{X}$ vérifie $T_2(C)$ alors $(\mathcal{X}^n, \sqrt{d^2 + \dots + d^2}, \nu^n)$ aussi (tensoris°) (avec la même const)

Not° si $A \subset \mathcal{X}$ et $r > 0$ $\quad A_r := \{x \in \mathcal{X} ; d(x, A) \leq r\}$

Th Si $\mathcal{X}$ vérifie $T_1(c)$ alors

a) $\forall A \subseteq \mathcal{X}$ avec $\nu(A) \geq \frac{1}{2}$ $\quad \forall r \geq 0$ $\quad \nu(A_r) \geq 1 - \sqrt{2}\, e^{-r^2/2c}$

b) $\forall f$ 1-lip et a une médiane de f $\quad \forall r > 0$

$$\nu\left(\{x \in \mathcal{X} ; a - r \leq f(x) \leq a + r\}\right) \geq 1 - 2\sqrt{2}\, e^{-r^2/2c}$$

Déf a médiane de f si $\nu(f \geq a)$ et $\nu(f \leq a) \geq \frac{1}{2}$

$(f = \mathcal{X} \to \mathbb{R})$

c) $\forall f\, \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 1-lip et $b = moy(f) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\, d\nu(x)$

on a la m̂ chose avec $(8c, e^{4\pi c^2})$ au lieu de

$(2c, 2C)$, i.e.

$\forall r > 0$ $\quad \nu\left(\{x \in \mathcal{X} ; b - r \leq f(x) \leq b + r\}\right) \geq 1 - e^{8\pi} e^{-r^2/8c}$

a) est déjà montré

b) Soit $A = \{x \in \mathcal{X} ; f(x) \leq a\}$ $\Rightarrow \nu(A) \geq \frac{1}{2}$ donc a) s'applique

$\forall r' < r$, si $x \in A_{r'}$ alors $\exists x_0 \in A$ $\; d(x_0, x) \leq r$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + r$ (car f 1-lip) $\leq a + r$

$\Rightarrow \nu(\{x \in \mathcal{X} ; f(x) > a + r\}) \leq \nu(\mathcal{X} \setminus A_{r'}) \leq \sqrt{2} \exp(-r'^2/2c)$

$\forall r' < r \Rightarrow \leq \sqrt{2}\, e^{-r^2/2c}$

idem pour $f(x) < a - r$

$\Rightarrow \nu(|f(x) - a| < r) \leq 2\sqrt{2}\, e^{-r^2/2c}$.

c) Calcul de Cavalieri : (a médiane b moyenne)

$$R_0 := |a-b| = |a - \int f \, d\nu| \leq \int_{\mathcal{X}} |a-f| \, d\nu = \int_0^\infty \nu(|a-f|>r) \, dr$$

$$\leq 2\sqrt{2} \int_0^\infty e^{-r^2/2c} dr = 4\sqrt{\pi c}$$

Cas 1 Si $r \geq 2R_0 = 2|a-b|$ et $|f-b| \geq r$ alors

$$|f-a| \geq |f-b| - |a-b| \geq \frac{r}{2} \quad \text{donc}$$

$$\nu(\{|f-b|>r\}) \leq \nu \; |f-a| > \frac{r}{2} \leq 2\sqrt{2} \, e^{-(r/2)^2/2c}$$

Cas 2 Si $r < 2R_0 \leq 8\sqrt{\pi c}$ alors

$$\nu(\{|f-b|>r\}) \leq \underbrace{e^{(4\sqrt{2}\sqrt{2\pi c})^2/8c}} e^{-r^2/8c}$$

$$= e^{16.2.2\pi c/8c} = e^{8\pi} \text{ ou } e^{4\pi C^2}$$

$\uparrow C^2$ avec $C = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{Exemple d'application}}$ Sur $(\mathbb{R}^d)^n$, avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$f_{n,\sigma}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{k=1}^{n} \|x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)}\| \text{ (avec } n+1=1)$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) := \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_{n,\sigma}(x_1, \dots, x_n)$$

Soit ν vérifiant $T_2(c)$ sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}$

On choisit $(x_1, \dots, x_n)$ selon ν^n

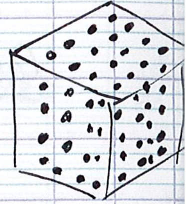
Ainsi ν^n vérifie $T_1(c)$ et donc les a) b) c) du th. p.70

Fait admis : Si $d \geq 3$ $\exists \gamma = \gamma(\nu) > 0$;

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/d - 1} \int f_n(x_1, \dots, x_n) \, d\nu^n = \gamma$$

c'est vrai aussi pour $d = 1$ mais peut-être pas pour $d = 2$ (où viennent des log ?)

Un peu comme si les pts étaient bien répartis :



$n = p^d$ points

On peut alors montrer que à dist $\frac{1}{p}$ $\to$ $p^{d-1} = n^{1-\frac{1}{d}}$

$$\nu^n\left(\left\{ \vec{x} \in (\mathbb{R}^d)^n ; \left| f_n(\vec{x}) n^{\frac{1}{d} - 1} - \gamma \right| > r \right\}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a $$\left| f_{\sigma,n}(\vec{x}) - f_{\sigma,n}(\vec{y}) \right| = \sum_{k=1}^{n} \| x_{\sigma(k+1) \bmod n} - x_{\sigma(k)} \| - \| y_{\sigma(k+1) \bmod n} - y_{\sigma(k)} \|$$

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{n} \| x_k - y_k \| \leq 2\sqrt{n} \, \| \vec{x} - \vec{y} \|$$

et un min de fonctions k-lip est k-lip, donc f est $2\sqrt{n}$-lip

d'où avec Th c) p 70

$$\nu^n\left(\left| f_n n^{\frac{1}{d} - 1} - \gamma_n \right| > r \right) = \nu^n\left(\left| \frac{f_n}{2\sqrt{n}} - \gamma_n n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{d}} \right| > \frac{r}{2} n^{1/2 - 1/d} \right)$$

$$\leq C_1 \exp\left(- \frac{(\frac{r}{2})^2 n^{1 - \frac{2}{d}}}{2c} \right) \qquad \gamma_n =$$

Somme $\Rightarrow$ cv p.s. par Borel Cantelli