Nicolas JUILLET

Le 27 oct. 2022
13h38

La méthode hongroise

$27! > 10^{28}$ Vidéo de Stéphane Le Borgne

Pb d'affect° résolu en n^3.

Kuhn – Munkres (Wikipédia F)
1955 1957

Affect° (assignment) n tasks for n workers

minimize the sum of costs = find $\min\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

where $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ is the cost matrix ($a_{ij} \geq 0$)

Lemma $\forall A$ with $a_{ij} \geq 0$ $= B + C + D$ $\quad B = \mathrm{diag}(b_1 \cdots b_n) J$

$C = J \, \mathrm{diag}(c_1 \cdots c_2)$

$B, C \geq 0 \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \forall i \, \exists j \; d_{ij} = 0$

$\forall j \, \exists i \; d_{ij} = 0$

Ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

on met un zéro sur chaque ligne en retranchant à chaque ligne son + petit él^t

$$= (1\,4\,7) J + J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on retranche à chaque colonne son + petit él^t

puis un zéro sur chaque colonne

Def $S \subset [\![1, n]\!]^2$ sont indép si 1 seul sur chaque ligne et chaque colonne

On a donc fini si n zéros de D sont indépendants

→ 2 questions : • how to check if $\exists\, n$ indep. zeroes ?
• What to do if not ?

Ex
$$\begin{matrix}1&2&2\\1&3&4\\1&4&3\end{matrix} = \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} J + \begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix}1&&\\&1&\\&&1\end{matrix} J + J \begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

1 ligne et 1 col. couvrent tous les 0
$1+1<3 \Rightarrow \nexists$ 3 zéros indép.

2ème étape : repérer dans les entrées restantes après avoir ôté tous les 0 en un nombre min de lignes et colonnes le + petit élément, augmenter sur les lignes et diminuer sur les colonnes de 0 =

"line" : row or colonne

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&0&1\\0&1&0\end{array}\right)$$

≈ Denes König's th : max number (indep 0) = min number of lines

th $\forall E \subset [\![1,n]\!]^2$
$$\max\{\#S \;;\; S \text{ indep} \subset E\} = \min\{\#\text{lines } L \;;\; L \text{ covers } E\}$$

$\sum_{i,j} m_{i,j}$ diminue de $n(n-(i+j))c$

la bonne affect°

Ex $\begin{pmatrix} 18 & 15 & 15 & 16 \\ 7 & 17 & 11 & 13 \\ 25 & 19 & 18 & 21 \\ 9 & 22 & 19 & 23 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 13 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 13 & 10 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 4 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ tjs 3 (le # max indép)

$\to \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ indép.

Algo Step A Starify zeros (max for ⊂° but not nec^{ly} in card)

ex $\begin{pmatrix} 0^* & 0 & \cdot \\ \cdot & 0^* & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ B0 rayer les colonnes $\ni 0^*$

Step B

Tant que $\exists 0$ non couverts

B1 pour un 0 non rayé, si $\exists 0^*$ sur sa ligne changer l en col. $\begin{pmatrix} 0^* & \boxed{0} & - \\ - & 0^* & 0' \\ 0 & - & - \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 0^* & 0' & \cdot \\ - & 0^* & 0' \\ 0 & - & - \end{pmatrix} \leftarrow$ no $0^* \to$ on peut mettre un 0

libéré

$\begin{pmatrix} 0^* & 0' & \\ & 0^* & 0' \\ 0' & & \end{pmatrix}$

À la fin les $0'$ forment un ens. max indép.

Si ce 0 libéré est ds la colonne d'un 0^* c'est que ce 0^* est sur la ligne d'un $0'$

switch * and ' on chain of o'o*o'o*...