Nicolas JUILLET

Jeudi 27 janv 2022
14 07

Suite et peut-être fin

Parenthèse On dit qu'une v.a. $X = (\Omega, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ a une densité f_X si $\mathbb{P}^X := X_\# \mathbb{P} << \mathcal{L}eb^1$ et $\mathbb{P}^X = f_X \, \mathcal{L}eb^1$

↑ abs^t cont p/r à Lebesgue sur $\mathbb{R}$

De même (X,Y) a une densité f_{XY} si $\mathbb{P}^{(X,Y)} := (X,Y)_\# \mathbb{P} = f_{XY} \, \mathcal{L}eb^2$

Rq Il faut bien sûr $\iint f_{XY} \, dx dy = 1$

Prop Les intégrales partielles $x \mapsto \int f(x,y) dy$ et $y \mapsto \int f(x,y) dx$ sont aussi des densités (≥ 0 et d'intégrale 1)
Ce sont les densités marginales de X et de Y

Preuve Une mes est caractérisée par l'intégr° de fns φ, par ex. cont. bornées. Ainsi

$$\int \varphi(X) \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, d\mathbb{P}^X(x) = \int \varphi(x) f_X(x) \, dx$$

mais est aussi $= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \, d\mathbb{P}^{(X,Y)}(x,y)$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) f_{(X,Y)}(x,y) \, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx$$

$\Rightarrow f_X = \int f_{XY}(\cdot, y) dy$ p.s.

De m̂ $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) \, dx$ p.s.

Rq Pour x fixé, $y \mapsto \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ est aussi ≥ 0 et d'intégrale $= 1$, donc peut s'interpréter comme une densité conditionnelle, notée $f_{(Y \mid X = x)}$

("sachant $X = x$")

Ainsi $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\, xy \, d\mathbb{P}^{X,Y}\, xy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\, f_{(Y|X=x)}(y)\, dy \right) f_X(x)\, dx$

<u>Interprétation</u> : Posons $k(x,\cdot) = f_{(Y|X=x)} \cdot dy$

Alors $\mathbb{P}^{X,Y} = \mathbb{P}^X (id \times k)$.

<u>Rappel</u> Toute mesure m sur $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}'$ a une désintégration de type loi marginale / lois conditionnelles. Si les marges sont ν et ν', alors $m = \nu(id \times k)$, où $\forall A \subseteq \mathcal{Y}$, A mesurable,
$m\, A \times \mathcal{Y}' = \nu A$ et $\forall B$ mes $\subseteq \mathcal{Y}'$ $\nu'(B) = \int k(y, B)\, d\nu(y)$

<u>Cas particulier</u> : Si $m \ll \mu \times \mu'$ et $f := \dfrac{dm}{d(\mu \times \mu')}$ alors
$\nu = f_Y \cdot \mu$ où $f_Y(y) = \int f(y,y')\, d\nu(y')$

et pour μ-presque tout y $k_y = f_{(Y'|Y=y)}\, \mu'$ où

$$f_{(Y'|Y=y)}(y') = \frac{f(y,y')}{f_Y(y)}$$

<u>Calcul de l'entropie</u> (en admettant que tout est bien défini)

$$\mathrm{Ent}(m \mid \mu \times \mu') := \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'} f\, xy \,\log \underbrace{f(x,y)}_{= f_X(x) \cdot f_{(Y|X=x)}(y)}\, d\mu \times d\mu'$$

$$= \left(\int_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'} f(x,y) \log f_X(x) + \int f(x,y) \log f_{(Y|X=x)}(y) \right) d\mu \times d\mu'$$

$$= \int_{\mathcal{X}} f_X(x) \log f_X(x)\, d\mu(x) + \int f_X(x) \left[f_{Y|X=x}\, y \log \text{ idem } d\mu' \right] d\mu$$

$$= \mathrm{Ent}(\nu \mid \mu) + \int \mathrm{Ent}(k_x \mid \nu')\, d\mu(x)$$

car $[\quad] = \mathrm{Ent}(k_x \mid \mu')$

Objectif : "tensoriser" $T_2(c)$ i.e. montrer que, si $\exists C \geq 0$ tq

$\forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \quad W_{2,d}(\nu,\mu) \leq \sqrt{C\, Ent(\nu|\mu)}$

$\forall \nu' \in \mathcal{P}(\mathcal{X}') \quad W_{2,d'}(\nu',\mu') \text{ — '' — } |\mu'$

$\left(\text{où } W_2(\mu,\nu) = \sqrt{\min_\pi \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2 \, d\pi(x,y)} \right)$

alors $\forall m \in \mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{X}') \quad W_{2,d''}(m, \mu\times\mu') \leq \sqrt{C\, Ent\, m|_{\mu\times\mu'}}$

avec $d'' = \sqrt{d^2 + d'^2}$

On a $\forall \gamma \in Marg(\mu\times\mu', m) \subseteq \mathcal{P}((\mathcal{X}\times\mathcal{X}')\times(\mathcal{X}\times\mathcal{X}'))$

$W_2(\mu\times\mu', m)^2 \leq \int (d(x,y)^2 + d'(x',y')^2) \, d\gamma(x,x',y,y')$

On va choisir γ assez bon = plan de transport de KNOT.

Soit $\pi \in Marg(\mu,\nu)$ optimal pour le transport sur $\mathcal{X}$

Pour x,y fixés soit $\pi_{xy} \in Marg\ \mu'\ \nu'_y \in \mathcal{P}(\mathcal{X}'\times\mathcal{X}')$ optimal entre μ' et ν'_y.

Soit $\tilde{\gamma} := \pi_{xy}(id \times \underbrace{\pi_{xy}}_{=k(y,\cdot)})$??

(c'est la loi de X,Y,X',Y' où XY est optimal et $\mathbb{P}^{X',Y'|(X,Y)=(x,y)}$ est optimal $\forall (x,y)$)

Enfin, soit $\gamma = transp_\# \tilde{\gamma}$ ou $transp(x,y,x',y) = (x,x',y,y')$

On vérifie que $\gamma \in Marg(\mu\times\mu', m)$

Ainsi $W_2(\mu\times\mu', m)^2 \leq W_2(\mu,\nu)^2 + \int W_2(\mu',\nu'_y)^2 \, d\pi(x,y)$

$\leq c\, Ent(\nu|\mu) + \int c\, Ent(\nu'|\mu') \, d\nu(y) = c\, Ent(m, \mu\times\mu')$

Talagrand$_2$

Rappel $T_2(c) \Rightarrow T_1(c)$ car $W_1(\mu,\nu) \leqslant W_2(\mu,\nu) \underset{\uparrow T_2(c)}{\leqslant} \sqrt{c\,\mathrm{Ent}(\nu|\mu)}$

Supposons $(\mathcal{X},d,\mu)$ satisfait $T_1(c)$

Notation Pour $A \subseteq \mathcal{X}$ avec $\mu(A)\neq 0$ $\quad \mu_A := \frac{\mathbb{1}_A}{\mu(A)} = \frac{\mu(\cdot\cap A)}{\mu(A)} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$

Pour $r \geqslant 0$ $\quad A_r = \{x\in\mathcal{X} ;\, d_A x \leqslant r\}$

$$A \subseteq A_0 = \overline{A} \subseteq A_s \subseteq A_t \text{ si } s<t$$

Calcul préliminaire

$$\mathrm{Ent}(\mu_A|\mu) = \int \frac{\mathbb{1}_A}{\mu(A)} \log \frac{\mathbb{1}_A}{\mu(A)}\, d\mu$$

$$= \frac{1}{\mu(A)}\int_A \Big(\underbrace{\log \mathbb{1}_A}_{=0 \text{ sur } A} - \log \mu(A)\Big) d\mu = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} \log\frac{1}{\mu(A)} = \log \frac{1}{\mu(A)}$$

Le résultat : a) si $\mu(A) \geqslant \frac{1}{2}$ alors $\forall r>0$

$$\mu(\mathcal{X}\setminus A_r) \leqslant \sqrt{2}\exp\left(-\frac{1}{2c}r^2\right)$$

$\mathcal{X}\setminus A_r$ est noté $\overline{A_r}$ (! pas l'adhérence)

b) Si f est 1-lip, $\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ alors $\forall r>0$

$$\mu\left(\{x\in\mathcal{X} ;\, |f - \text{mediane } f| \geqslant r\}\right) \leqslant 2\sqrt{2}\exp\left(-\frac{1}{2c}r^2\right)$$

c) —— // —— $\mu\left(\{x\in\mathcal{X} ;\, |f-\int f\,d\mu| \geqslant r\}\right) \leqslant C\exp\left(\frac{1}{8c}r^2\right)$

Preuve a) $W_2(\mu_A, \mu_{\overline{A_r}}) \leqslant W_2(\mu_A,\mu) + W_2(\mu,\mu_{\overline{A_r}})$ $\quad (\overline{A_r} := \mathcal{X}\setminus A_r)$

$$\leqslant \sqrt{c\,\mathrm{Ent}(\mu_A|\mu)} + \sqrt{c\,\mathrm{Ent}(\mu_{\overline{A_r}}|\mu)}$$

$$= \sqrt{c \times \log \tfrac{1}{\mu(A)}} + \sqrt{c \log\left(\tfrac{1}{\mu(\overline{A_r})}\right)}$$

or on doit déplacer d'au moins r, donc

$$W_2(\mu_A, \mu_{\overline{A}_r}) \geq r$$

Soit $r_0 := \sqrt{c \log \frac{1}{\mu(A)}}$

Alors $r \leq W_2(\mu_A, \mu_{\overline{A}_r}) \leq \underbrace{\sqrt{c \log(1/\mu(A))}}_{r_0} + \sqrt{c \log(1/\mu(\overline{A}_r))}$

$\Rightarrow \mu(\overline{A}_r) \leq \exp\left(-\frac{1}{c}(r - r_0)^2\right)$

$r^2 = (r_0 + (r - r_0))^2 \leq 2(r_0^2 + (r - r_0)^2)$

$\Rightarrow (r - r_0)^2 \geq \frac{1}{2} r^2 - r_0^2$

Ainsi, pour $r \geq r_0$ $\mu(\overline{A}_r) \leq \exp\left(-\frac{1}{2c} r^2\right) \underbrace{\exp\left(\frac{1}{c} r_0^2\right)}_{\mu(A)}$

et pour $r \leq r_0$ $\mu(\overline{A}_r) \leq 1 \leq \underbrace{\exp\left(\frac{1}{2c} r_0^2\right)}_{\frac{1}{\sqrt{\mu(A)}} \leq \sqrt{2} \text{ si } \mu(A) \geq \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2c} r^2\right)$

Nicolat JUILLET Je 3 fév. 2022, 13 30

Géodésiques et barycentres de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$

I Rappel

Dans $\mathbb{R}^d$, un barycentre de $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ de poids $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $\left(\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ est le point $b := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Soit $f = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $y \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y - x_i|^2$ norme eucl.

f est cont et coercive (i.e. $\to +\infty$ si $|y| \to +\infty$)

donc atteint ~~son~~ min en au moins 1 pt

et, comme f est différentiable, et $Df(y) = 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda \langle y - x_i | \cdot \rangle$

ne s'annule qu'en $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$,

c'est le min recherché