25/11/2021

A. Makhlouf

Suite de l'exposé précédent

→ Rappels des résultats de la dernière fois.

Preuve du thm 3 : $x_i > 0$

Soit $X = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ ~~Montrons~~ Montrons $k \leq m$

X vérifie le système sous forme standard, ce que l'on peut réécrire

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{A_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{A_2} + \dots + x_k \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}}_{A_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

On a k vecteurs dans $\mathbb{R}^m$. Supposons par l'absurde que cette famille soit liée : $\exists \, (\alpha_i) \neq 0$ tq $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k = 0$.

(non tous nuls)

On a aussi

$$x_1 A_1 + \dots + x_k A_k = B.$$

On peut alors écrire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x_1 + \lambda \alpha_1) A_1 + (x_2 + \lambda \alpha_2) A_2 + \dots + (x_k + \lambda \alpha_k) A_k = B$$

Pour λ assez petit,

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ x_k + \lambda \alpha_k \end{pmatrix}$$ est aussi solution réalisable du problème

Or, X est dans le segment $[X_{-\lambda}, X_\lambda]$, qui n'est pas réduit à un point

or ~~on~~ sait que X doit être extrémale. Donc la famille est libre, et donc $k \leq m$. ∎

Prenons un autre exemple :

$$\begin{cases} \text{Max}\,(12x_1 + 8x_2) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 = une unité de chêne

x_2 = une unité de pin

x_3 = une unité de temps de travail.

Sous forme standard, cela donne donc

$$\begin{cases} \text{Max}\,(12x_1 + 8x_2) \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 150 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_5 = 80 \end{cases} \qquad x_i \geq 0$$

Variables de base

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{ij}	
x_3	5	2	1	0	0	150	$150/5 = 30$	
x_4	2	3	0	1	0	100	$100/2 = 50$	
x_5	4	2	0	0	1	80	$80/4 = 20$	← le min des 3
	12	8	0	0	0	0		

↑ la variable qu'on augmente

Solution évidente : $X_1 = (0, 0, 150, 100, 80) \Rightarrow B = 0$

On obtient alors un nouveau tableau.

x_3	0	$-1/2$	1	0	$-5/4$	50		
x_4	0	2	0	1	$-1/2$	60	$60/2 = 30$	← min
x_1	1	$1/2$	0	0	$1/4$	20	$20/(0,5) = 40$	
	0	2	0	0	-3	-240		

nlle solution : $X_2 = (20, 0, 50, 60, 0)$, $B = 240$

Le nouveau système obtenu est alors

$$\begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/4 & -11/8 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 30 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3/8 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -5/2 & -300 \end{array}\right)$$

$X_3 = (5, 30, 65, 0, 0) \rightarrow$ 5 tables et 30 chaises.

$B = 300$, optimal car on a que des coefs négatifs, donc on diminuerait l'objectif en les augmentant.

Problème dual : un mec veut racheter toutes les matières premières au fabriquant, de telle sorte à ce que ce dernier soit gagnant, ie il gagne plus que si il avait fabriqué.

y_1 = coût d'une unité de chêne
y_2 = coût ——— pin
y_3 = coût ——— temps de travail

l'objectif devient de minimiser le coût global.

avec contraintes :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \min(150y_1 + 100y_2 + 80y_3) \\ 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 12 \\ 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 8 \\ y_i \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = \max(12x_1 + 8x_2) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 150 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80. \end{cases}$$

$\updownarrow$ Problème dual — $\updownarrow$ Problème initial

On réécrit le problème dual comme un problème de max en prenant l'opposé partout. On trouve :

$$\begin{cases} Z = \max\left(-150y_1 - 100y_2 - 80y_3\right) \\ -5y_1 - 2y_2 - 4y_3 \leq -12 \\ -2y_1 - 3y_1 - 2y_3 \leq 8 \end{cases}$$ Forme canonique.

On peut alors écrire

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 150 \\ 2 & 3 & 100 \\ 4 & 2 & 80 \\ \hline 12 & 8 & 0 \end{array}\right)$$ (matrice du pb initial)

Matrice du problème dual :

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 & -12 \\ -2 & -3 & -2 & -8 \\ -150 & -100 & -80 & 0 \end{pmatrix} = -{}^{t}M$$

Si je reprends la dernière ligne du tableau optimal du pb initial obtenu avant, multiplié par -1 : on a $\left(0, 0, 0, 1, 5/2\right)$

$$Y = \left(0, 1, 5/2, 0, 0\right)$$

$$X = \left(5, 30, 65, 0, 0\right)$$

Finalement, le financier paye autant que si le fabriquant avait fabriqué.