et $\int d(x, \mathrm{proj}_A(x))^2 \, d\mu < +\infty$

Alors $(id, \mathrm{proj}_A)_\# \mu$ est l'uniq. plan de TO entre μ et $\mathrm{proj}_{A\#}\mu$.

le 24/02/2022 : A.L.

Dualité

Problème primal : Minimiser $J_c : \pi \in \mathcal{M}arg(\mu, \nu) \longmapsto \int c \, d\pi$

Ex : $X \to$ Boulangeries | $Y \to$ café

- $c(X, Y)$: coût du transport
- $\mu(x)$: quantité produite en x
- $\nu(y)$: quantité consommée en y

Prestataire se propose de prendre en charge le transport.

- $\Psi(x)$: prix d'achat à la boulangerie x.
- $\phi(y)$: prix de vente au café y.

- "Gain local" (pour le prestataire) $= \phi(y) - \Psi(x)$.
- "Gain global" $= \int \phi \, d\nu - \int \Psi \, d\mu$.

Condition pour que le marché se fasse :

$\phi(y) - \Psi(x) \leq c(x, y)$, $\forall x, y$

On dit que (Ψ, ϕ) est admissible

Pb du prestataire :

Maximiser $\int \phi \, d\nu - \int \Psi \, d\mu$

ss la contrainte
- $(\Psi, \phi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$
- et $\phi \oplus (-\Psi) \leq c$

$\Bigg\} \in \mathcal{A}_c$

couple (notation) $(x,y) \to \phi(x)$ et $\Psi(y)$ et $c(x,y)$.

On veut mq : $\inf_{\pi \in Marg(\mu,\nu)} \int c \, d\pi = \sup_{(\Psi,\phi) \in \mathcal{A}_c} \int \phi \, d\nu - \int \Psi \, d\mu$.

$\geq$: OK car en $\int$ $\phi(y) - \Psi(x) \leq c(x,y)$ le long d'un $\pi \in Marg(\mu,\nu)$, on a

$$\int \phi(y) - \Psi(x) \, d\pi(x,y) \leq \int c \, d\pi$$

$$\Rightarrow \int \phi \, d\nu - \int \Psi \, d\mu \leq c \, d\pi \quad \{ \text{vrai } \forall \pi.$$

Preuve formelle : On pose

$$\chi(\pi) := \begin{cases} 0 & , \text{ si } \pi \in Marg(\mu,\nu) \\ +\infty & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$= \sup_{(\Psi,\phi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)} \left\{ \int \phi \, d\nu - \int \Psi \, d\mu - \int \phi \, d\pi + \int \Psi \, d\pi \right\}$$

$=$ si $\pi \in Marg$

$=$ si $\pi \in Marg$

On pose $I(\Psi, \phi) := \begin{cases} 0 & , \text{ si } (\Psi,\phi) \in \mathcal{A}_c \\ -\infty & , \text{ sinon} \end{cases}$

$$= \inf_{\pi \in \mathcal{M}_+} \left\{ \int \underbrace{c - \phi + \Psi}_{\geq 0 \text{ si } \in \mathcal{A}_c} \, d\pi \right\}.$$

$$\inf_{\pi \in Marg(\mu,\nu)} \int c \, d\pi = \inf_{\pi \in \mathcal{M}_+} \left\{ \int c \, d\pi + \chi(\pi) \right\}$$

$$= \inf_{\pi \in \mathcal{M}_+} \left\{ \int c \, d\pi + \sup_{(\Psi,\phi) \in L^1 \times L^1} \left\{ \int \phi \, d\nu - \int \Psi \, d\mu - \int \phi \, d\pi + \int \Psi \, d\pi \right\} \right\}$$

$$\text{“}=\text{”} \sup_{(\Psi,\phi)} \inf_{\pi \in \mathcal{M}_+} \left\{ \int c\, d\pi + \int \phi\, d\nu - \int \Psi\, d\mu - \int \phi\, d\pi + \int \Psi\, d\pi \right\}$$

⚠ c'est faux pour le moment.

$$= \sup_{\Psi,\phi} \left\{ \int \phi\, d\nu - \int \Psi\, d\mu + I(\Psi,\phi) \right\}.$$

$$= \sup_{(\Psi,\phi)} \left\{ \int \phi\, d\nu - \int \Psi\, d\mu \right\}.$$

<u>cex</u> : $\inf \sup \{x+y\} \neq \sup \inf \{x+y\}$.

$\phi(y) - \Psi(x) \le c(x,y) \iff \phi(y) \le \Psi(x) + c(x,y)$.

$\iff \forall y,\ \phi(y) \le \inf_x \{\Psi(x) + c(x,y)\} = P_c \Psi(y)$

$(\Psi, P_c\Psi) \in \mathcal{A}_c$, car $\forall (x,y),\ \phi(y) \le P_c\Psi(y) \le \Psi(x) + c(x,y)$.

admissible (meilleure)

$\phi(y) - \Psi(x) \le c(x,y),\ \forall x,y$.

$\iff \Psi(x) \geq \phi(y) - c(x,y),\ \forall (x,y)$.

$\iff \Psi(x) \geq \sup_y \{\phi(y) - c(x,y)\} =: Q_c\phi(y)$.

$(Q_c\phi, \phi) \in \mathcal{A}_c$ et $\Psi \geq Q_c\phi$.

<u>Def</u> : (i) On dit que $\Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est c-convexe si $\exists \phi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ tq $\Psi = Q_c\phi$.

(ii) On dit que $\phi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est c-concave si $\exists \Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tq $\phi = P_c\Psi$.

Déf : (iii) $\forall x, \quad \partial_c \Psi(x) = \{ y \,/\, \Psi(x) + c(x,y) = P_c \Psi(y) \}$

Prop : $a_{x,M} = M + c(x, \cdot)$ et $b_{y,M} = M - c(\cdot, y)$.

(i) $\Psi_1 \leq \Psi_2 \Rightarrow P_c \Psi_1 \leq P_c \Psi_2$

$\phi_1 \leq \phi_2 \Rightarrow Q_c \phi_1 \leq Q_c \phi_2$

(ii) $Q_c P_c \Psi \leq \Psi$ et $P_c Q_c \phi \geq \phi$.

(iii) $P_c Q_c P_c \Psi = P_c \Psi$ et $Q_c P_c Q_c \phi = Q_c \phi$.

(iv) Ψ est c-convexe $\Leftrightarrow \Psi = Q_c P_c \Psi$

ϕ est c-concave $\Leftrightarrow \phi = P_c Q_c \phi$.