20/01/21

Nicolas J.

Suite des exposés précédents

Rappel 1 : $p \geq 1$ (X, d) métrique

$$W_p(\mu, \nu) = \min_{\pi \in Marg(\mu,\nu)} \left(\int_{X \times X} d(x,y)^p \, d\pi(x,y) \right)^{1/p}$$

$$\left(< \infty \text{ si } \mu \text{ et } \nu \in P_p(X) \right)$$

Rappel 2. $$Ent(\nu | \mu) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \nu \not\ll \mu \\ \int \rho \log(\rho) \, d\mu & \text{si } d\nu = \rho d\mu . \end{cases}$$

Rappel 3 : (X, d, μ) satisfait $T_p(C)$

$$\forall \nu \in P(X), \quad W_p(\nu, \mu) \leq \sqrt{C \cdot Ent(\nu|\mu)}$$

Remarque. Si $\mu \in P_p(X)$ on voit que si (X, d, μ) satisfait à $T_p(C)$, alors $\nu \notin P_p(X) \Rightarrow Ent(\nu|\mu) = +\infty$.

Indication : inégalité triangulaire de W_p.

Premier but : démontrer l'inégalité triangulaire

Définition : $k : X \times Bor(Y) \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}_+$ est un noyau si

① $\forall x$, $k(x, \cdot) \in P(Y)$ (proba sur Y)

② $\forall B \in Bor(Y)$, $x \longmapsto k(x, B)$ est mesurable

Notation :

- $k_x := k(x, \cdot)$
- k peut s'écrire $k_\cdot$
- $id_x := \delta_x \; (id(x, B)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $(k \times k')(x, B \times B') = k_x(B) \, k_x(B')$.

Construction : Si $\mu \in P(X)$ et k un noyau de $X \times P(Y)$, $\mu.k$ est une mesure de probabilité sur Y définie par

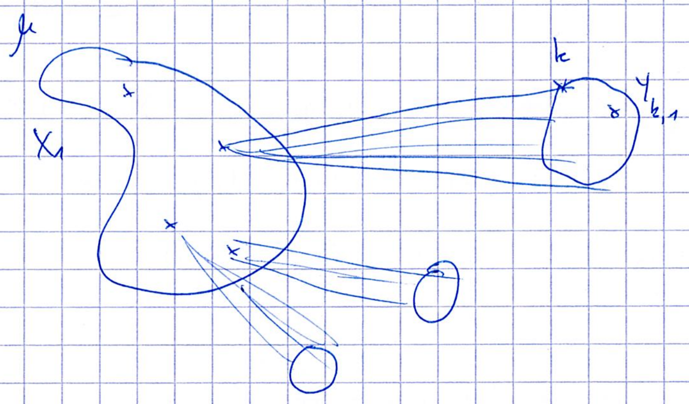
$$\mu.k(B) = \int k_x(B)\, d\mu(x),$$

ou de façon équivalente $\int f(y)\, d(\mu.k)(y) = \int \left[\int f(y)\, dk_x(y)\right] d\mu(x)$

Interprétation probabiliste : Si (X_n) est de loi μ alors cette suite réalise un nuage de points proche de μ.

Recette : on remplace chaque X_n par $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,m}$ de loi $k_{X_n}(\cdot)$.

Le nuage ainsi créé est proche de $\mu.k$.



Exercice 0 : $T_{\#}\mu$ s'écrit aussi $\mu.k$ où $k(x, B) = \delta_{T(x)}(B)$.

Exercice 1 : $\frac{1}{2}\left[\delta_{T_1(x)} + \delta_{T_2(x)}\right]$ alors $\mu.k = \frac{1}{2}\left(T_{1\#}\mu + T_{2\#}\mu\right)$.

Exemple : $\mu.(id \times k)$: on prend X selon μ qu'on envoie sur (Y, Y'), de loi $(id \times k)_x = \delta_x \times k_x$.

On a alors $Y = X$ et donc cette mesure est la loi de (X, Y), où Y est réparti selon k_x.

Exemple : $\mu(k \times k' \times k'')$ sera une mesure sur $Y \times Y' \times Y''$ où X choisi selon μ et converti en $Y \times Y' \times Y''$ choisi indépendament : (produit) selon k_x, k'_x, k''_x

Propriété (Désintégration) : ("Fubini généralisé")

Si $m \in P(X \times Y)$ il existe $\mu \in P(X)$ (en fait $\mu = proj^1_\# m$) et $k_\cdot$ de X dans $P(Y)$ tels que $m = \mu(id \times k)$.

(c'est-à-dire $\forall f$ continue positive $X \times Y \to \mathbb{R}^+$,

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,dm = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\,dk_x(y) \right] d\mu x$$

Remarques : autre notation pour $\mu(id \times k)$ (Figalli 2021)

$$m = k_x \otimes \mu(k)$$

Application 1 : Si μ, ν, η mesures sur X, alors $W_p(\mu, \eta) \leq W_p(\mu, \nu) + W_p(\nu, \eta)$.

$\hookrightarrow$ Démo : soit $\pi_{12} \in Marg(\mu, \nu)$ optimal et $\pi_{23} \in Marg(\nu, \eta)$ optimal.

Désintégration :

$$\nu(k_{2\to1} \times id) := \pi_{12}$$

$$\nu(id \times k_{2\to3}) := \pi_{23}$$

On pose $\pi_{123} := \nu(k_{2\to1} \times id \times k_{2\to3})$

$$\pi_{13} = proj^{13}_\# \pi_{123} = \nu(k_{2\to1} \times k_{2\to3}) \in Marg(\mu, \eta)$$

Explication :

$$\pi_{123}(A \times B \times C) = \int_B \left(k_{2\to 1}(A)\, k_{2\to 3}(C) \right) d\nu(y)$$

$$\int f(x,y,z)\, d\pi_{123} = \iint f(x,y',z)\, d_{k_{2\to1}}(y)\, \delta_y(y')\, k_{2\to3}(z)\, d\nu(y$$

pas de y

$$W_p(\mu,\eta) = \min(\dots) \leq \left(\int \underbrace{d(x,z)^p}\ \underbrace{d\pi_{13}(x,z)}_{d\pi_{13}(x,z)} \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(d(x,y) + d(y,z) \right)^p \rightsquigarrow \text{Minkowski}$$

$$\leq \left(\int d(x,y)^p\, d\pi_{12}(x,y) \right)^{1/p} + \left(\int d(y,z)^p\, d\pi_{23}(y,z) \right)^{1/p} = W_p(\mu,\nu) + W_p(\nu,\eta)$$

Illustration : $X = \mathbb{R}^2$, $d = \|\cdot\|_2$

$\mu = \mathcal{L}_{[-2,-1]\times[1,2]}$, ν uniforme sur $\{0\}\times[1,2]$

η ———— $[3,5]\times\{0\}$

Exercice : a) la projection de μ sur ν induit l'unique plan de transport optimal

b) tout plan de transport entre ν et η est optimal (en part. $\nu\times\eta$)

c) Se faire une idée de qui est π_{123}

d) Trouver un autre π dont les marges seraient μ, ν, η avec $\mathrm{proj}^{12}_{\#}\pi$ et $\mathrm{proj}^{23}_{\#}\pi$ valant comme en a) b) c)