DELAUNEY VORONOÏ LEGENDRE LAGUERRE

NC

1. diagramme de Voronoï

Soit E une e.v. euclidien

Definition 1. *Soit $\mathcal{S}$ un sous ensemble fini de E. A chaque $P \subset \mathcal{S}$ non vide, on associe l'ensemble $V(P)$ des x de E tels que*

- *pour chaque $p \in P$, $\mathrm{d}(x,p) = \min_{q\in\mathcal{S}} \mathrm{d}(x,q) = m(x)$,*
- *pour chaque $p \in \mathcal{S} \setminus P$, $\mathrm{d}(x,p) > m$.*

Le diagramme de Voronoï de $\mathcal{S}$ est l'ensemble $V_{\mathcal{S}}$ des parties $V(P) \neq \emptyset$ où $P \subset \mathcal{S}$ est non vide.

Remark 1.
- Pour chaque $p \in \mathcal{S}$, $V(p) = V(\{p\})$ est non vide, donc $V(p) \in V_{\mathcal{S}}$. De plus les parties $V(p)$ sont ouvertes.
- Les parties $V(P)$ sont convexes car les sous ensembles $\{x : \mathrm{d}^2(x,p) < \mathrm{d}^2(x,p')\}$ et $\{x : \mathrm{d}^2(x,p) = \mathrm{d}^2(x,p')\}$ sont convexes.
- Les $V(P) \in V_{\mathcal{S}}$ forment une partition de E.
- $\dim E = 2$. Si $P \subset \mathcal{S}$ a au moins trois points alors $V(P)$ contient au plus un point : le centre c du cercle circonscrit à trois points de P. Si $V(P)$ est non vide, l'interieur de ce cercle ne contient aucun point de $\mathcal{S}$ (sinon $c \notin V(P)$), les points de P sont cocycliques.

Theorem 2. *Si* $\dim E = d$, $\mathrm{card}\, V_{\mathcal{S}} = O((\mathrm{card}\,\mathcal{S})^{\lceil \frac{d}{2} \rceil})$.

2. Généralisation du diagramme de Voronoï

Definition 3. *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de n applications $f_1, ..., f_n : E \to \mathbb{R}$. Pour $x \in E$, notons $m_{\mathcal{F}}(x) = m(x) = \min\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ et pour $P \subset \mathcal{F}$, non vide, notons*

$$V_{\mathcal{F}}(P) = V(P) = \{x \in E : \forall f \in P, f(x) = m(x) \text{ and } \forall g \in \mathcal{F}\backslash P, f(x) > m(x)\}.$$

Le diagramme de Voronoï associée à $\mathcal{F}$ est constitué de l'ensemble $V_{\mathcal{F}}$ des $V(P)$ tels que $\emptyset \neq P \subset \mathcal{F}$ et $V(P) \neq \emptyset$, et de la relation d'inclusion entre ces ensembles.

Cas particuliers $q_1, ..., q_n \in E$ et d une distance sur E, $f_i(x) = d(q_i, x)$. On peut aussi considérer la distances à des parties.

Remark 2. Si $g_1, ..., g_n : E \to \mathbb{R}$ sont n autres fonctions telles que $f_i(x) < f_j(x) \Leftrightarrow g_i(x) < g_j(x)$ et $f_i(x) = f_j(x) \Leftrightarrow g_i(x) = g_j(x)$ alors les ensembles $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ et $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_n\}$ définissent le même diagramme de Voronoï.

3. Diagramme de Delaunay

Soit E une e.v. euclidien de dimension 2

Definition 4. *Soit $\mathcal{S}$ un sous ensemble fini de E. On considère les parties $Q \subset \mathcal{S}$ non vide telles qu'il existe un cercle $C(x, r)$ vérifiant*

- $C(x, r) \cap \mathcal{S} = Q$.
- $\overset{o}{D}(x, r) \cap \mathcal{S} = \emptyset$

$C(x, r)$ est un cercle de Delaunay, Q est défini par le cercle $C(x, r)$.
Le diagramme de Delaunay $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des $\operatorname{conv}(Q)$.

Remark 3.
- Généralisation en dimension quelconque en remplaçant cercle par sphère et disque par boule.
- Les éléments de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ sont soit des points, soit des segments, soit des polygones convexes. Si $\mathcal{S}$ ne contient pas de quadruplet de points cocycliques, les polygones sont tous des triangles.
- Si $\operatorname{conv} Q \subset \operatorname{conv} Q' \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$ alors $Q \subset Q'$. Ene effet, soit $C(x, r)$ le cercle définissant Q'. On a $Q \subset \operatorname{conv} Q \subset \operatorname{conv} Q' \subset D(x, r)$ donc $Q \subset \mathcal{S} \cap C(x, r) = Q$.
- Si $\operatorname{conv}(Q) \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$, alors Q est l'ensemble les points extrémaux de $\operatorname{conv}(Q)$.
- Si $\operatorname{conv}(Q)$ et $\operatorname{conv}(Q') \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$ alors $\operatorname{conv}(Q) \cap \operatorname{conv}(Q')$ est soit vide soit un élément de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$. Soit $C(x, r)$ et $C(x', r')$ les deux cercles de Delaunay associés. Comme $Q \subset C(x, r) \setminus \overset{o}{D}(x', r')$ et $Q' \subset C(x', r') \setminus \overset{o}{D}(x, r)$, l'intersection est contenu dans le segment $\operatorname{conv}(C(x, r) \cap C(x', r'))$. On conclut en examinant les cas suivants les intersections de $\operatorname{conv}(C(x, r) \cap C(x', r'))$ avec Q et Q'.

Proposition 5. *Les* $\operatorname{conv}(Q) \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$ *forment une triangulation de* $\operatorname{conv}(\mathcal{S})$.

Proof. Soit $f : x \in E = \mathbb{R}^2 \to \|x\|^2 \in \mathbb{R}$, $\operatorname{pr} : (x, y, z) \in E \times \mathbb{R} \to (x, y) \in E$, $\mathcal{G}_f$ le graphe de f et $u : x \in E \to (x, f(x)) \in \mathcal{G}_f$.

Soit $K = \operatorname{conv}(u(\mathcal{S}))$. K est un polyèdre qui se projette sur $\operatorname{conv}(\mathcal{S})$. Soit F une face de K visible depuis le "bas". F est l'intersection d'un hyperplan non vertical avec K :

$$F = K \cap \{(x, y, z) : z = ax + by + c\} = K \cap H$$

et $K \subset \{(x,y,z) : z \geq ax+by+c\} = K \cap H^+$. La courbe $H \cap \mathcal{G}_f$ à pour équations $x^2+y^2 = z = ax+by+c$ et elle se projette sur le cercle C d'équation $x^2+y^2 = ax+by+c$.

Soit D l'interieur de ce cercle. Comme $\mathrm{pr}^{-1}(D) \cap \mathcal{G}_f \subset H^{<0}$, D ne contient aucun point de $\mathcal{S}$.

Soit $Q = C \cap \mathcal{S}$. Comme $D \cap \mathcal{S} = \emptyset$, $\mathrm{conv}(Q) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Comme $F = \mathrm{conv}(H \cap u(\mathcal{S})) = \mathrm{conv}(u(Q))$, $\mathrm{pr}(F) = \mathrm{conv}(Q)$. On conclut car les $\mathrm{pr}(F)$ recouvrent $\mathrm{conv}(\mathcal{S})$. □

Proposition 6 (Dualité Voronoï-Delaunay)**.** *Soit $Q \subset \mathcal{S}$ non vide. Alors $\mathrm{conv}\, Q \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ ssi $V(Q) \in V_{\mathcal{S}}$.*

Proof. Soit $\mathrm{conv}(Q) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Soit $C(x,r)$ le cercle définissant Q. Par définition du diagramme de Delaunay, $\mathrm{d}(x,q) = r$ pour tous les $q \in Q$ et $\mathrm{d}(x,q) > r$ pour tous les $q \in \mathcal{S} \subset Q$ donc $x \in V(Q)$, donc $V(Q)$ est non vide, donc $V(Q) \in V_{\mathcal{S}}$. Réciproquement, si $V(Q) \in V_{\mathcal{S}}$ alors $V(Q)$ contient un point x et $C(x, r = \mathrm{d}(x,r))$ est un cercle de Delaunay qui défini Q. □

Proposition 7.
- *$d = \dim E = 2$. Il existe un algorithme de construction du diagramme de Delaunay en $O(n \ln n)$ dans le pire des cas, $n = \mathrm{card}\, \mathcal{S}$.*
- *$d = \dim E \geq 3$. Il existe un algorithme de construction randomisé de complexité moyenne $O(n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil})$.*

Proposition 8. $\dim E = 2$. *Etant donné une triangulation de $\mathcal{S}$ on peut considérer la liste ordonnée par ordre croissant des angles des triangles de cette triangulation, on tient une liste $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. La liste associée à la triangulation de Delaunay est maximal pour l'ordre lexicographique.*

4. Diagramme de Voronoï de puissance et transport optimal

Dans cette section E est euclidien.

Definition 9. *Soit $q_1, \dots, q_n$ n points de E et $r_1, \dots, r_n$ n nombres réels positifs. Le diagramme de Voronoï de puissance de l'ensemble de couples $(q_1, r_1), \dots, (q_n, r_n)$, est le diagramme de Voronoï défini par l'ensemble de fonctions*

$$\mathcal{F} = \{f_i : x \in E \to \mathrm{d}^2(x, q_i) - r_i^2 : i = 1 \dots, n\}.$$

Les cellules de Voronoï sont convexes car les régions définie par $\mathrm{d}^2(x,q_i) - r_i^2 = \mathrm{d}^2(x,q_j) - r_j^2$ et par $\mathrm{d}^2(x,q_i) - r_i^2 > \mathrm{d}^2(x,q_j) - r_j^2$ le sont.

Theorem 10. *Soit μ une probabilité sur E qui ne charge pas les hyperplans et soit $\nu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{q_i}$ une probabilité discrète sur E où les a_i sont > 0. Soit*

$r_1, \ldots, r_n$ des nombres réels ≥ 0 tels que pour chaque i, $\mu(V(\{f_i\})) = a_i$ où les $V(P)$ désignent les cellules du diagramme de Voronoï de puissance défini par $(q_1, r_1), \ldots, (q_n, r_n)$. Soit $T : E \to \{q_1, \ldots, q_n\}$ une application de transport. Si il existe $i \neq j$ tel que $\mu(V(\{f_i\}) \cap T^{-1}(q_j)) > 0$ alors T n'est pas optimal.

Proof. 1. Pour chaque $1 \leq i, j \leq n$, notons

$$A_{i,j} = \{x \in V(f_i) : T(x) = q_j\} \text{ and } a_{ij} = \mu(A_{ij}).$$

Par definition de a_{ij} et par hypothèse, pour chaque i,

$$\sum_j a_{ij} = \sum_j \mu(V(\{f_i\}) \cap T^{-1}(q_j)) = \mu(V(f_i)) = a_i.$$

De même par définition d'une application de transport (et comme μ ne charge pas les hyperplans), pour chaque j,

$$\sum_i a_{ij} = a_j.$$

2. Par hypothèse, il existe un $j_0 \neq j_1$ tel que $\mu(V(\{f_{j_0}\}) \cap T^{-1}(q_{j_1})) > 0$.

Lemma 11. *Si $a_{j_0,j_1} > 0$ et $j_0 \neq j_1$ alors il existe $j_2 \neq j_1$ tel que $a_{j_1 j_2} > 0$.*

Proof of the lemma. Comme $a_{j_0 j_1} > 0$ et comme $\sum_i a_{i j_1} = a_{j_1}$, $a_{j_1 j_1} < a_{j_1}$. Comme $\sum_j a_{j_1 j} = a_{j_1}$ et $a_{j_1 j_1} < a_{j_1}$, il existe $j_2 \neq j_1$ tel que $a_{j_1 j_2} > 0$. □

On itère le processus, on trouve une suite $j_0, j_1, \ldots, j_p, \ldots$ tel que pour chaque $p \geq 0$, $j_p \neq j_{p+1}$ and $a_{j_p, j_{p+1}} > 0$. Il existe deux indices $k < l$ tel que $j_k = j_l$. On peut supposer que $k = 0$. Soit $a = \min_{p=0}^{l-1} a_{j_p, j_{p+1}}$. Dans chaque $A_{j_p, j_{p+1}}$, on peut trouver un sous ensemble $B_{j_p, j_{p+1}}$ tel que $\mu(B_{j_p, j_{p+1}}) = a$. Considérons le nouveau plan de transport T' qui modifie T sur $B = \cup_{p=0}^{l-1} B_{j_p, j_{p+1}}$ en posant

$$\forall x \in B_{j_p, j_{p+1}}, T'(x) = q_{j_p}$$

et qui reste inchangé sur B^c. Pour Montrer que T' améliore T il suffit de montrer que le coût du transport sur B décroît strictement. Pour chaque $x \in B_{j_p, j_{p+1}} \subset A_{j_p, j_{p+1}}$,

$$\mathrm{d}^2(x, q_{j_p}) - r_{j_p}^2 < \mathrm{d}^2(x, q_{j_{p+1}}) - r_{j_{p+1}}^2,$$

donc

$$\mathrm{d}^2(x, q_{j_p}) < \mathrm{d}^2(x, q_{j_{p+1}}) + r_{j_p}^2 - r_{j_{p+1}}^2.$$

En intégrant sur B on obtient

$$\begin{aligned}
\int_B \mathrm{d}^2(x, T'(x)) d\mu(x) &= \sum_{p=0}^{l-1} \int_{B_{j_p, j_{p+1}}} \mathrm{d}^2(x, q_{j_p}) d\mu(x) \\
&< \sum_{p=0}^{l-1} \int_{B_{j_p, j_{p+1}}} (\mathrm{d}^2(x, q_{j_{p+1}}) + r_{j_p}^2 - r_{j_{p+1}}^2) d\mu(x) \\
&= \int_B \mathrm{d}^2(x, T(x)) d\mu(x) + \sum_{p=0}^{l-1} \int_{B_{j_p, j_{p+1}}} (r_{j_p}^2 - r_{j_{p+1}}^2) d\mu(x) \\
&= \int_B \mathrm{d}^2(x, T(x)) d\mu(x) + \sum_{p=0}^{l-1} a(r_{j_p}^2 - r_{j_{p+1}}^2) d\mu(x) \\
&= \int_B \mathrm{d}^2(x, T(x)) d\mu(x) + r_{j_0}^2 - r_{j_l}^2 \\
&= \int_B \mathrm{d}^2(x, T(x)) d\mu(x)
\end{aligned}$$

□

5. Fonctions convexes, fonctions conjuguées

Soit E un espace vetoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

Une fonction convexe $f : C \to \mathbb{R}$ est implicitement prolongée à E par $f(x) = +\infty$ pour $x \notin C$. On obtient ainsi une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui vérifie les inégalités de convexité. Reciproquement une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les inégalités de convexité induit une vraie fonction convexe sur $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in E : f(x) < \infty\}$. Dans toute la suite on supposera implicitement que $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre c'est à dire que $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$.

Definition 12. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe propre et $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Une forme linéaire l sur E est un sous-gradient en x si pour tout $y \in \mathrm{Dom}(f)$,*

$$f(y) \geq f(x) + \langle l, y \rangle$$

Notation On désigne par $f'(x)$ l'ensemble des sous gradients de f en x et on écrit $l \in f'(x)$.

Definition 13. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. La fonction $f^* : E^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par*

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathrm{Dom}(f)} (\langle p, x \rangle - f(x))$$

s'appelle la transformée de Legendre de f ou la fonction conjuguée à f.

Proposition 14. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. Alors f^* est convexe.*

Remarque Grâce à l'identification $E = E^{**}$, le sous gradient de f^* en $y \in E^*$ est une partie de E.

Proposition 15. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre, $q \in \mathrm{Dom}(f)$ et $p \in E^*$. Si $p \in f'(q)$ alors $f^*(p) = \langle p, q\rangle - f(q)$.*

Proof. Supposons $p \in f'(q)$. Pour tout $x \in \mathrm{Dom}(f)$, par définition du sous-gradient,

$$f(x) \geq f(q) + \langle p, x - q\rangle$$

donc

$$\langle p, q\rangle - f(q) \geq \langle p, x\rangle - f(x).$$

Par conséquent, $f^*(p) = \sup_{x \in \mathrm{Dom}(f)}(\langle p, x\rangle - f(x)) = \langle p, q\rangle - f(q)$. □

6. Diagramme de Delaunay et fonctions convexes

Notation. Désignons par $\mathrm{pr} : E \times \mathbb{R} \to E$ la projection définie par $\mathrm{pr}(x, t) = x$.

Definition 16. *Soit A une partie de E et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Notons $\mathcal{G}_f$ le graphe de f.*
1. Une partie $\mathcal{C}$ de A est une f-courbe si il existe un hyperplan affine $\mathcal{P}$ de $E \times \mathbb{R}$ non vertical tel que $\mathcal{C} = \mathrm{pr}(\mathcal{G}_f \cap \mathcal{P})$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une f-courbe définie par un hyperplan $\mathcal{P}$. Soit ϕ est la forme affine sur E telle que $\mathcal{P} = \mathcal{G}_\phi$. L'intérieur $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des $q \in A$

$$f(q) < \phi(q).$$

De même l'extérieur $\mathcal{C}_e = \{q \in A : f(q) > \phi(q)\}$.

Notations. Soit A une partie de E et $f : A \to \mathbb{R}$ une application.
1. On désigne par $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des f-courbes.
2. On note $u : A \to \mathbb{R}$ l'application définie par $u(q) = (q, f(q))$.

Lemma 17. *Soit $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application. Notons $m = \dim E$ Par $m + 1$ points de A affinement libre il passe une unique f-courbe.*

Proof. Il existe une unique forme affine ϕ interpolant f entre $m + 1$ points affinement libres. □

Definition 18. *Soit $A \subset E$, $f : A \to \mathbb{R}$ une application et $\mathcal{S}$ un ensemble fini inclus dans A. Le diagramme de Delaunay de $\mathcal{S}$ associé à f est l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de toutes les parties non vide $Q \subset \mathcal{S}$ telles qu'il existe une f-courbe $\mathcal{C}$ vérifiant :*

- $\mathcal{C} \cap \mathcal{S} = Q$,
- $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Cet ensemble $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de parties de $\mathcal{S}$ est muni de la relation d'ordre inclusion.

Remarques. 1. On obtient le diagramme de Delaunay d'ordinaire en considérant l'ensemble des $\mathrm{conv}(Q)$.
2. Supposons que $A = \mathrm{Dom}(f)$ où f est convexe propre. Soit Q_1 et Q_2 deux parties de $\mathcal{S}$ appartenant aux diagramme de Delaunay et ϕ_1, ϕ_2 des formes affines définissant Q_1 et Q_2. Supposons $\mathrm{conv}(Q_1) \subset \mathrm{conv}(Q_2)$. Soit $x_1 \in Q_1$, il existe $y_1, ..., y_k \in Q_2$ tels que $x_1 = \sum_{i=1}^k a_i y_i$ où les a_i sont positifs de somme 1. On a

$$\phi_2(x_1) = \sum_{i=1}^k a_i \phi_2(y_i) = \sum_{i=1}^k a_i f(y_i) \geq f(x_1),$$

donc comme x_1 n'appartient pas à l'intérieur de la f-courbe définie par ϕ_2, x_1 appartient à la f-courbe définie par ϕ_2 et par conséquent $x_1 \in Q_2$. On en déduit que lorsque f est convexe, les diagrammes de Delaunay associés à f correspondent à des diagrammes de Delaunay ordinaires.

7. Diagramme de Voronoï et fonctions convexes

Definition 19. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre, $q_1, ...q_n \in \mathrm{Dom}(f)$ et $p_1, ..., p_n \in E^*$ tels que $p_i \in f'(q_i)$, $i = 1, ..., n$. Le diagramme de Voronoï associée à f et aux couples $(q_1, p_1), ..., (p_n, q_n)$ est le diagramme de Voronoï défini par les applications*

$$f_i : q \in E \to -f(q_i) - \langle p_i, q - q_i \rangle$$

$i = 1, ..., n$.

Remark 4.
- Le diagramme est le même que celui défini par les fonctions
$$g_i : q \in E \to f(q) - f(q_i) - \langle p_i, q - q_i \rangle.$$
- Si $\mathrm{Dom}(f) = E$ et si f est différentiable sur E alors pour chaque i, p_i est simplement égale à la différentielle de f en q_i et on a
$$g_i(q) = D(q, q_i) = f(q) - f(q_i) - \langle f'(q_i), q - q_i \rangle$$

ou D est la divergence de Bregman. On retrouve ainsi le diagramme de Bregman-Voronoï défini par Frank Nielsen, Jean-Daniel Boissonnat et Richard Nock.
- Supposons E euclidien. En choisissant $f(q) = \|q\|^2$ on retrouve le diagramme de Voronoï standard.

8. Dualité

Theorem 20. *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe propre, $\mathcal{S} = \{q_1, ..., q_n\} \subset$ $\mathrm{Dom}(f)$ et $p_1, ..., p_n \in E^*$. Supposons que pour chaque i, $p_i \in f'(q_i)$. Alors le diagramme de Delaunay associée à f et à $\mathcal{S} = \{q_1, ..., q_n\}$ et le diagramme de Voronoï dans E^* défini par l'ensemble de fonctions*

$$\mathcal{F} = \{f_i : y \in E^* \to -f^*(p_i) - \langle y - p_i, q_i \rangle : i = 1, ..., n\},$$

sont duaux :
- *pour chaque $Q \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, la partie*

$$V(Q) = \{x \in E : \forall q_i \in Q, f_i(x) = m_{\mathcal{F}}(x) \text{ and } \forall q_i \in \mathcal{S} \setminus Q, f_i(x) > m_{\mathcal{F}}(x)\}$$

appartient au diagramme de Voronoï de $\mathcal{F}$,
- *l'application $Q \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \to V(Q) \in V_{\mathcal{F}}$ est une bijection.*

Notation Pour tout $p \in E^*$, notons $m(p) = \min_{i=1,...,n} f_i(p)$.

Proof. 1. Soit $Q \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ une partie de $\mathcal{S}$ appartenant au diagramme de Delaunay de $\mathcal{S}$. Par définition, il existe une forme linéaire $l \in E^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q = \mathcal{S} \cap \mathcal{C},\ \mathcal{S} \cap \mathcal{C}_i = \emptyset$$

où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par f et $\phi = l + c$. Cela signifie que pour tout $q_i \in Q$, on a

$$f(q_i) - \langle l, q_i \rangle = c$$

et pour tout $q_i \in \mathcal{S} \setminus Q$, on a

$$f(q_i) - \langle l, q_i \rangle > c.$$

Comme pour chaque i, $p_i \in f'(q_i)$, $f(q_i) + f^*(p_i) = \langle p_i, q_i \rangle$. Par conséquent, pour tout $q_i \in Q$, on a

$$f_i(l) = -f^*(p_i) - \langle l - p_i, q_i \rangle = f(q_i) - \langle l, q_i \rangle = c$$

et pour tout $q_i \in \mathcal{S} \backslash Q$, on a

$$f_i(l) = -f^*(p_i) - \langle l - p_i, q_i \rangle > c,$$

d'où $l \in V(Q)$ et $m(l) = c$. Par conséquent $V(Q) \neq 0$ et $V(Q)$ appartient au diagrammne de Voronoï associée à $\mathcal{F}$.

2. Soit Q et Q' deux parties de $\mathcal{S}$ appartenant au diagramme de Delaunay de $\mathcal{S}$. Supposons $Q' \setminus Q \neq \emptyset$. Soit $\phi = l + c$ définissant la partie Q du diagramme de Delaunay. D'après 1, $l \in V(Q)$ On sait aussi d'après 1, que pour tout $q_i \notin Q$,

$$f_i(l) > c = m(l).$$

Donc si $q_i \in Q' \setminus Q$ alors

$$f_i(l) > m(l)$$

donc $l \notin V(Q')$ et $V(Q') \neq V(Q)$. On démontre de même que si $Q \setminus Q' \neq \emptyset$ alors $V(Q) \neq V(Q')$. Nous avons donc montrer que l'application $Q \to V(Q)$ est une injection du diagramme de Delaunay dans le diagramme de Voronoï.

3. Soit $\mathcal{V}$ une partie du diagramme de Voronoï de $\mathcal{F}$ et $P \subset \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{V} = V_{\mathcal{F}}(P)$. Considérons la partie Q de $\mathcal{S}$ telle $q_i \in Q \Leftrightarrow f_i \in P$. Montrons que Q appartient au diagramme de Delaunay de $\mathcal{S}$ et que $V(Q) = \mathcal{V}$. Par definition de $V_{\mathcal{F}}(P)$, pour chaque $f_i \notin P$, il existe $l_i \in \mathcal{V}$ telle que $f_i(l_i) > m(l_i)$. Considérons l'isobarycentre l des l_i associées aux $f_i \notin P$. D'une part, comme les régions de Voronoï sont convexes $l \in \mathcal{V}$, d'autre part, pour chaque $f_j \notin P$,

$$\begin{aligned} f_j(l) &= \text{Moyenne}_i f_j(l_i) \\ &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{F} \setminus P)} \big(f_j(l_j) + \sum_{i \neq j,\, f_i \notin P} f_j(l_i) \big) \\ &> c := \frac{1}{\text{card}(\mathcal{F} \setminus Q)} \big(m(l_j) + \sum_{i \neq j,\, f_i \notin P} m(l_i) \big). \end{aligned}$$

De même, si $f_j \in P$, $f_j(l_i) = m(l_i)$ pour chaque i tel que $f_i \notin P$ donc $f_j(l) = c$. Pour montrer que Q est dans le diagramme de Delaunay, il suffit de prouver que Q est définie par la forme affine $l + c$. En effet, pour tout $q_j \in Q$,

$$\begin{aligned} f(q_j) - \langle l, q_j \rangle - c &= -f^*(p_j) - \langle l - p_j, q_j \rangle - c \\ &= f_j(l) - c = 0 \end{aligned}$$

et pour tout $q_j \notin Q$,

$$f(q_j) - \langle l, q_j \rangle - c = f_j(l) - c > 0.$$

La partie Q appartient donc au diagramme de Delaunay et par définition de Q on a $V(Q) = V_{\mathcal{F}}(P) = \mathcal{V}$. Par conséquent $Q \to V(Q)$ est surjective. $\square$