Programmation linéaire

A. Makhlouf

18/11/21

Recherche opérationnelle = science de la décision

Programmation mathématique

Optimisation

$\boxed{\text{Cas général}}$: opt. unidimensionnelle
bidimensionnelle

↳ calcul de dérivées

↳ multiplicateur Lagrange

⇝ à l'origine du calcul infinitésimal

⇝ méthods peu pratiques

$\boxed{\text{Cas linéaire}}$: prog. linéaire

↳ méthode du simplexe

↳ optimiser $y = f(x_1, \dots, x_n)$ sous contraintes

$$\begin{cases} C_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0, = 0, \leq 0 \\ \vdots \\ C_m(x_1, \dots, x_n) \dots \\ x_1 \geq 0, \dots\ x_n \geq 0 \dots \end{cases}$$

f, C_k linéairs :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$C_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

On traite un exemple : une entreprise produisant 2 produits A, B à l'aide de 3 machines M_1, M_2, M_3

les chiffres = temps passé en machine

	A	B	disponibilité des machines
M_1	9 min	8 min	120 h
M_2	6 min	10 min	100 h
M_3	5 min	15 min	125 h
Bénéfice	8 €	10 €	

Tentative de solution empirique

- si on produit que du A : $M_1 = \frac{120 \times 60}{9} = 800$

$M_2 = 1000, \quad M_3 = 1500$

min = 800, ie on peut produire 800 elts A, ce qui rapporte donc $800 \times 8 = 6400$ €.

- si on produit que du B, on gagne 5000 €.

↳ on pourrait imaginer une option qui utilise les 2 produits pour maximiser le gain.

Variables de décision : x_1 = nbre d'unités A

x_2 = nbre unités B

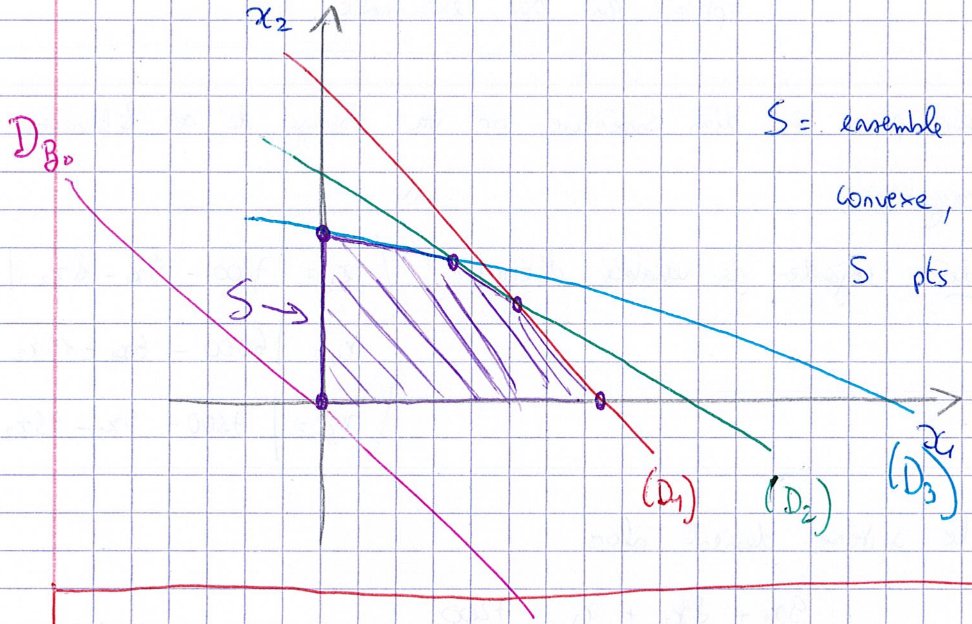
$B = 8x_1 + 10x_2$ bénéfice "fonction objectif".

Les contraintes donnent
$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 \leq 7200 & (= 120 \times 60 \text{ min}) \\ 6x_1 + 10x_2 \leq 6000 \\ 5x_1 + 15x_2 \leq 7500 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

⤳ optimiser B selon les contraintes ci-dessus, on cherche les couples (x_1, x_2) optimisant B.

Résolution géométrique :

① Détermination des solutions réalisables



S = ensemble des solutions réalisables, convexe, enveloppe convexe des S pts extrémaux.

Théorème 1 : L'ensemble des solutions réalisables est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Rappelons l'objectif $B(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2$.

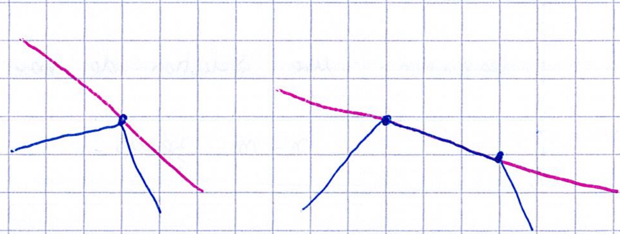
Si on veut un bénéfice $B = 0$, on obtient la droite $8x_1 + 10x_2 = 0 := D_{B_0}$

Toutes les droites D_{B_x} sont parallèles à D_{B_0}.

On déplace notre droite jusqu'à toucher le "dernier point" du polygone.

On note alors la droite $D_{B_{max}}$. B_{max} est donc le bénéfice maximal atteignable, pour le couple (x_1, x_2) correspondant au point par lequel passe la droite.

Deux cas possibles :



- Solution extrémale : correspond à un sommet de S
- solution optimale : solution qui réalise le max B.

Théorème 2 : S'il existe une solution optimale à un problème de programmation linéaire, alors il existe une solution optimal qui soit extrémale.

Pour passer en dim supérieure, on va essayer de se débarasser des inégalités.

Idée : rajouter des variabls d'écart :

$$\begin{pmatrix} x_3 = \lvert 7200 - 9x_1 - 8x_2 \rvert \\ x_4 = \lvert 6000 - 6x_1 - 10x_2 \rvert \\ x_5 = \lvert 7500 - 5x_1 - 15x_2 \rvert \end{pmatrix}$$

Le système devient alors

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 + x_3 = 7200 \\ 6x_1 + 10x_2 + x_4 = 6000 \\ 5x_1 + 15x_2 + x_5 = 7500 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

système linéaire, solution $\in \mathbb{R}^5$.

x_3, x_4, x_5 variabls principals $\qquad x_1, x_2$ var. non principales.

En mettant $x_1 = x_2 = 0$, on trouve une solution de base

$$X_1 = (0, 0, 7200, 6000, 7500),$$

qui correspond à $B = 0$.

Définition : une solution de base est une solution comportant au moins $n - m$ zéros.

On cherche à améliorer l'objectif B. On augmente x_1, on laisse $x_2 = 0$.

$\Rightarrow \quad x_1 \nearrow, x_2 = 0, \quad x_3 \searrow : \quad x_3 = 0 \Leftarrow x_1 = \frac{7200}{9} = 800$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x_4 \searrow : \quad x_4 = 0 \Leftarrow x_1 = 1000$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 \searrow : \quad x_5 = 0 \Leftarrow x_1 = 1500$

<u>But</u> : passer x_3 à $\ominus$ pour pouvoir augmenter x_1, pour garder $n-m$ zéros.

↳ on veut une autre solution de base

On ne veut pas passer dans les négatifs, donc on s'arrête à $x_1 = 800$.

On décide que les variables principals sont x_1, x_4, x_5 et les non-principals sont x_2, x_3. On obtient

$$\begin{cases} x_1 = 800 - \frac{1}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_2 \\ x_4 = 1200 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{14}{3}x_2 \\ x_5 = 3500 + \frac{5}{9}x_3 - \frac{95}{9}x_2 \\ B = 6400 + \frac{26}{9}x_2 - \frac{8}{9}x_3 \end{cases}$$

On obtient la solution $X_2 = (800, 0, 0, 1200, 3500) \Rightarrow B = 6400$.

L'étape suivante : on augmente x_2 (x_3 on peut pas car il y a un $\ominus$), on trouve

$$X_3 = \left(\frac{4800}{7}, \frac{1800}{7}, 0, 0, \frac{5500}{7}\right) \Rightarrow B = \frac{55\,000}{7}$$

B est ici donné par $B = \frac{55000}{7} - \frac{10}{21}x_3 - \frac{13}{21}x_4$.

↳ il n'y a que des $\ominus$, on ne peut plus rien augmenter, sinon cela diminue B.

Théorème 3 : Toute solution extrémale est une solution de base.