17/03/22

Arnaud

$x \cdot y = \langle x, y \rangle$

Suite de la dernière fois

Rappels : $c : X \times Y \to \mathbb{R}$

$\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad P_c\psi : y \in Y \longmapsto \inf_{x \in X} \{\psi(x) + c(x,y)\}$

$\phi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\qquad Q_c\phi : x \in X \longmapsto \sup_{y \in Y} \{\phi(y) + c(x,y)\}$.

Applications : $X = Y = \mathbb{R}^n$, $\quad c(x,y) = -\langle x,y \rangle$

Définition : (i) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x,y\rangle - f(x)\}$.

(ii) $\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ f^*(y) = x \cdot y - f(x)\}$.

① $P_c\psi = -(\psi^*)$ et $Q_c\phi = (-\phi)^*$.

En effet, $P_c\psi(y) = \inf_x \{\psi(x) + c(x,y)\}$

$$= -\sup_x \{xy - \psi(x)\}$$

$$= -[\psi^*(y)]$$

et pareil.

Rappel : $\partial_c\psi(x) = \{y \in Y,\ P_c\psi(y) = \psi(x) + c(x,y)\}$

② On a : $\partial\psi(x) = \partial_c\psi(x)$. En effet,

$$\partial_c\psi(x) = \{y \in \mathbb{R}^n ;\ -\psi^*(y) = \psi(x) - x \cdot y\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^n ;\ \psi^*(y) = x \cdot y - \psi(x)\} = \partial\psi(x).$$

Rappel : $Q_c P_c \Psi \leq \Psi$. $\quad Q_c P_c \Psi = (-P_c\Psi)^* = \Psi^{**} \leq \Psi$.

③ $P_c Q_c P_c \Psi = P_c \Psi$, donc $-(\Psi^{**})^* = -\Psi^*$, i.e. $\Psi^{***} = \Psi^*$.

④ Ψ c-convexe $\iff \exists\, \phi$ t.q. $\Psi = Q_c \phi$

admis $\longrightarrow$ $\iff \exists\, \phi$ t.q. $\Psi = \phi^*$

$\iff \phi$ convexe et semi-continue inférieure

⑤ f^{**} est l'enveloppe supérieure des minorantes affines de f.

$\hookrightarrow f^{**} = Q_c P_c f$

$\hookrightarrow Q_c P_c f = \sup \left\{ b_{y,M} \, ; \, (y, M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ et } b_{y,M} \leq f \right\}$

Rappel : $b_{y,M} = M - c(\cdot, y)$
$= M + \langle \cdot, y \rangle$

⑥ $d_{y,\alpha} = \langle y, \cdot \rangle - \alpha = b_{y,-\alpha}$

$d_{y,\alpha} \leq f \iff (y, \alpha) \in \text{épigraphe}(f^*)$.

Rappel : $b_{y,M} \leq \Psi \iff M \leq P_c \Psi(y)$.

Ici, on a $d_{y,\alpha} \leq f \iff b_{y,-\alpha} \leq f$.

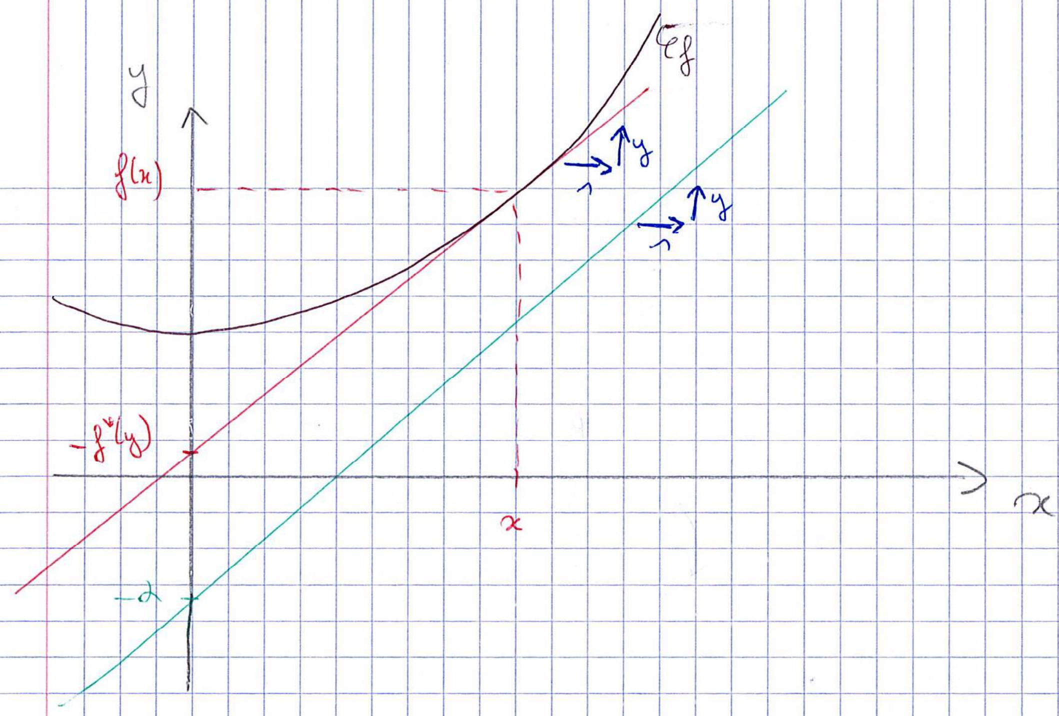
$\iff -\alpha \leq P_c f(y) = -f^*(y)$.

$\iff \alpha \geq f^*(y)$

$\iff (y, \alpha) \in \text{épi}(f^*)$.

$$\begin{cases} d_{y,\alpha} \leq f \\ d_{y,\alpha}(x) = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} b_{y,-\alpha} \leq f \\ b_{y,-\alpha}(x) = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha = P_c \Psi(y) \\ y \in \partial_c \Psi(x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \Psi^*(y) \\ y \in \partial \Psi(x) \end{cases}$$



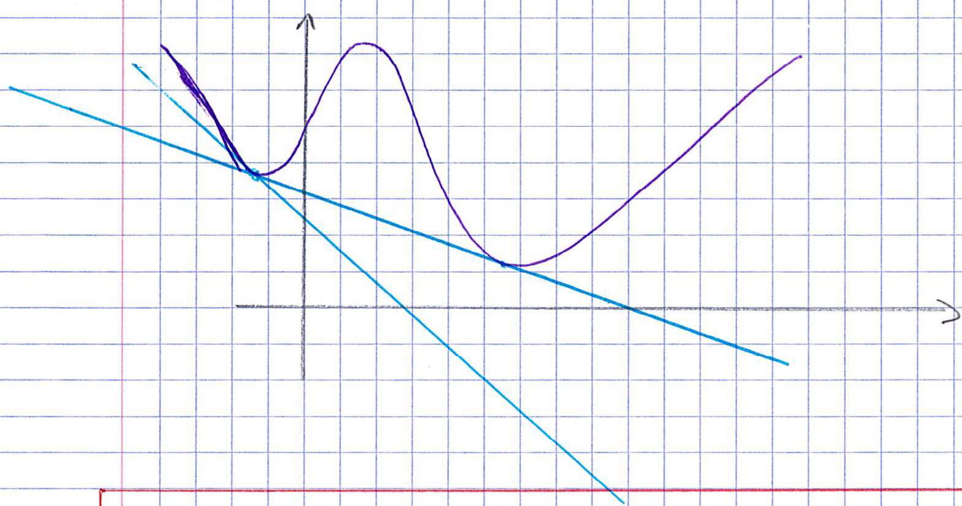
⑦ Définition : $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est propre si $f > -\infty$ et $f \not\equiv +\infty$

(Rappel) $\hookrightarrow f^* > -\infty \iff f^* \not\equiv -\infty \iff f \not\equiv +\infty$.

$\hookrightarrow f^* \not\equiv +\infty \iff f$ admet une minorante affine

Donc f^* est propre ssi $\begin{cases} f \not\equiv +\infty \\ f \text{ admet une minorante affine} \end{cases}$

⑧ $\partial f(x)$ est l'ensemble des pentes des minorantes affines de f exactes en x.



Proposition : Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe et différentiable en x, alors $\partial f(x) = \{ \nabla f(x) \}$.

Preuve : $y \in \partial f(x) \iff f^*(y) = x\cdot y - f(x)$

$$\iff \forall z,\quad x\cdot y - f(x) \geq z\cdot y - f(z)$$

$$\iff f(z) \geq f(x) + y\cdot(z-x),\quad \forall z. \qquad (\blacktriangle)$$

⊃ OK.

⊂ Soit $y \in \partial f(x)$. $\forall (t,h) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, on applique $(\blacktriangle)$ avec $z = x + th$

On obtient $\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t} \geq y\cdot h$.

$$\Big\downarrow t\to 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(h) = \nabla f(x)\cdot h.$$

$\langle \nabla f(x), \cdot \rangle = \langle y, \cdot \rangle$

■

Proposition : Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe, alors l'application $f|_{\mathring{\mathrm{dom}}(f)}$ est lipschitzienne sur tout compact de $\mathring{\mathrm{dom}}(f)$.

En particulier, $f|_{\mathring{\mathrm{dom}}(f)}$ est localement lipschitzienne.

Proposition : Si $C = \mathbb{R}^n$ est convexe, alors $\underbrace{\mathcal{L}^n}_{\text{Lebesgue}}(\overbrace{\partial C}^{\text{Frontière}}) = 0$.

24/03/22

Armand
(Suite)

Cas où $X = Y$ et c est une distance

Proposition : $\psi : X \to \mathbb{R}$ est c-convexe $\iff$ ψ est 1-lipschitzienne

De plus, dans ce cas, $Q_c \psi = \psi$

Rappel : $\psi = Q_c \phi \rightsquigarrow \psi$ est c-convexe.

($\Rightarrow$) Supp. que ψ est c-convexe. ie $\exists\, \phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\psi = Q_c \phi$.

Donc $\forall x \in X$, $\psi(x) = \sup\limits_{y \in X} \{ \underbrace{\phi(x) - c(x,y)}_{g_y(x)} \}$, c'est 1-lip

car $|\psi(x) - \psi(y)| \leq c(x,y)$ et le sup de fct° 1-lip est 1-lip.

distance sur $\mathbb{R}$. distance sur X

($\Leftarrow$) Supp que ψ est 1-lip. Alors $\forall y \in X$, $\psi(x) \geq \psi(y) - c(x,y)$.

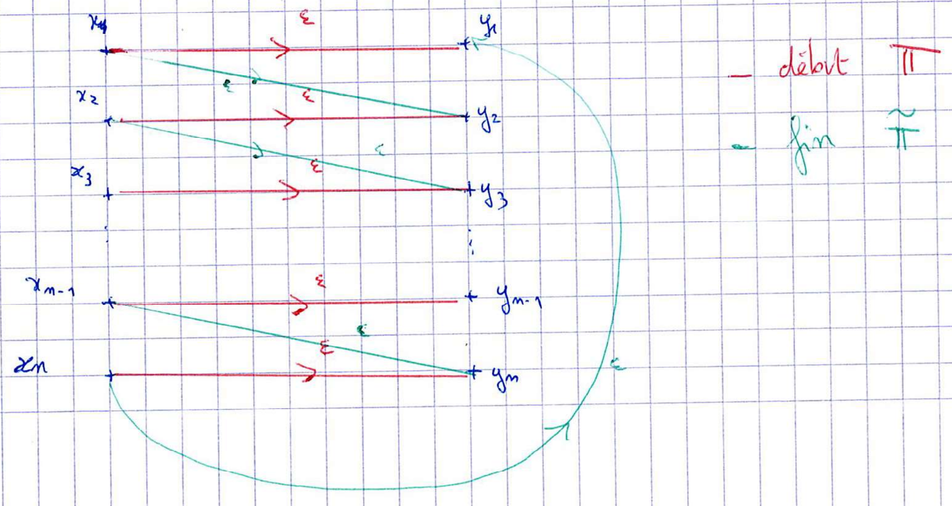
En passant au sup sur les y, on obtient $\psi(x) \geq Q_c \psi(x)$.

$\hookrightarrow Q_c \psi(x) \geq \psi(x) - c(x,x) = \psi(x)$. Donc $\psi = Q_c \psi$.

Monotonie :

Supp. X et Y sont discrets. $\mu \in P(X)$, $\nu \in P(Y)$, $\pi \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$

Soient $x_1, \dots, x_m \in X$ et $y_1, \dots, y_m \in Y$ tq $\forall i$, $\pi(x_i, y_i) > 0$.



La différence de coût entre π et $\tilde{\pi}$.

$$\int c \, d\tilde{\pi} - \int c \, d\pi = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} c(x_i, x_{i+1}) - c(x_i, y_i) \right)$$

Si $\pi \in O_c(\mu, \nu) \leftarrow$ ens. plans transports optimaux de μ à ν.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_{i+1}) \qquad (y_{n+1} = y_1)$$

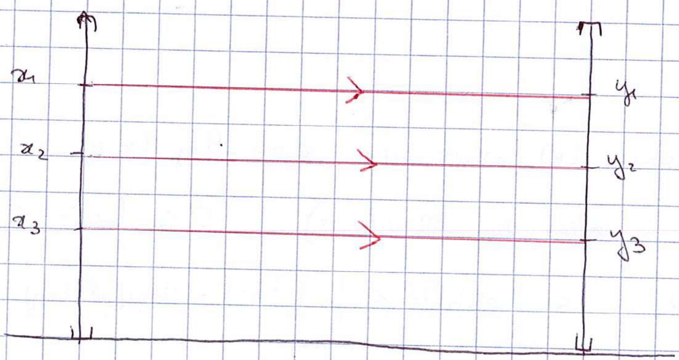
convention

Définition : (i) On dit que $\Gamma \subset X \times Y$ est <u>c-cycliquement monotone</u> si $\forall \left((x_i, y_i)_{i=1}^{n} \right) \in \Gamma^n$, on a $\sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} c(x_i, y_{i+1})$

(ii) Soit $\pi \in P(X \times Y)$. On dit que π est <u>c-cycliquement monotone</u> si $\exists \Gamma \subset X \times Y$ c-cycl. monotone tq $\pi(\Gamma) = 1$

<u>Exemple</u> :

$\mu =$ mesure



$\Gamma = \left\{ (0, y), (1, x), \; y \in [0, 1] \right\}$

est c-cycl. monotone.

$x^2 - 5 = 0$

$(a \oplus b)(x,y) = a(x) + b(y)$

Théorème : Soit $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ tq $\exists\, a \in L^1(\mu)$ et $b \in L^1(\nu)$ t.q. $c \geqslant a \oplus b$ $(*)$

① On a :

$$\sup_{(\psi,\phi)\in A} \left\{ \int \psi \, d\mu - \int_Y \phi \, d\nu \right\} = \inf_{\pi \in \mathrm{Marg}(\mu,\nu)} \left\{ \int c \, d\pi \right\},$$

où A est un des ensembles suivants :

↳ $A = \{ (\psi,\phi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu),\ \forall (x,y),\ \psi(x) - \phi(y) \leq c(x,y) \}$

↳ $A = \{ (\psi,\phi) \in \mathcal{C}_b(X) \times \mathcal{C}_b(Y),\ \text{———} \}$

↳ $A = \{ (\psi, Q\psi),\ \psi \in L^1(\mu) \}$

② Soit $\pi \in \mathrm{Marg}(\mu,\nu)$. LCSSE :

(i) π optimal $\iff$ (ii) π c-cycliq. monotone

$\iff$ (iii) $\exists\, \psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ c-convexe propre t.q. $\pi(\partial_c \psi) = 1$

③ Si $c \leq c_x \oplus c_y$, où $c_x \in L^1(\mu)$, $c_y \in L^1(\nu)$, alors le pb dual admet une solution.

Rmq : la condition $(*)$ assure que $\forall \pi \in \mathrm{Marg}(\pi,\nu)$, $\int c \, d\pi$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $0 \leq \int c \, d\pi \leq \int (a+b)_- \, d\pi$.

En effet, $\leq \int a \oplus b \, d\pi \leq \int_{X \times Y} \left(|a(x)| + |b(y)| \right) d\pi(x,y)$

$$= \int_X |a(x)| \, d\mu(x) \times \int_Y |b(y)| \, d\nu(y) < +\infty .$$

Rmq : Si c est continue, $\mathrm{supp}(\pi)$ est cycliq. monotone

Rmq : dans le cas $X = Y$ et c est une distance, la valeur du pb dual est $\sup\limits_{\psi,\, 1-\phi} \left\{ \int \psi \, d\mu - \int \psi \, d\nu \right\}$.