GTTO — Groupe de travail "transport optimal"

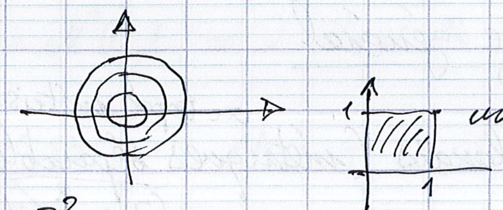
Armand LEY

Jeudi 14 octobre 2021
13 30

Le problème de Monge

Déplacer un tas de sable avec le moindre effort

Ex



uniforme

(Mieux vaut découpler les dessins pour y voir qq chose !)

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mu = A \longmapsto$ proportion de sable "au-dessus" de A

$x \in \mathbb{R}^2$

$T = x \longmapsto$ endroit où le sable en x a été envoyé

μ = configuration initiale

ν — " — finale

On veut $\forall A$ mesurable $\subseteq \mathbb{R}^2 \quad \nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

Coût = par exemple dist euclidienne $|\ |$

$$C(T) = \int_{\mathbb{R}^2} |x - T(x)|\, \mu(dx)$$

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ tribus

Notation = $T = (E, \mathcal{E}, \mu) \longrightarrow (F, \mathcal{F})$

Poussé en avant = $T_\# \mu = B \in \mathcal{F} \longmapsto \mu(T^{-1}(B))$

Rappel une tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble X est une partie de $\mathcal{P}(X)$:
- non vide
- stable par union dénombrable
- ——— complémentaire

Une mesure μ sur une tribu est $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tq $\mu(\sqcup A_n) = \sum \mu(A_n)$

$\mu(X)$ = masse de μ proba = mes de masse 1.

Le pb de Monge général

Données i) Soit E, F polonais (métriques séparables et complets) (∃ partie dénombrable dense)
ou topol métrisable

$\mathcal{P}(E) := \{\text{probas sur } E\}$

ii) Soit $\mu \in \mathcal{P}(E)$ $\nu \in \mathcal{P}(F)$

iii) Soit $c : E \times F \to [0, +\infty]$

Not° $Tr(\mu, \nu) = \{T : E \to F \,;\, T^{\#}_{\mu} = \nu\}$

But Étudier la minimisation de $C : T \in Tr(\mu,\nu) \to C(T)$

où $C(T) = \int_E c(x, T(x))\, \mu(dx)$

Pbs
1] $T = Tr(\mu, \nu)$ peut être $\emptyset$
2] $Tr(\mu,\nu) \neq Tr(\nu,\mu)$ a priori
3] T pas convexe
4] Pas tjs de min
5] inf pas tjs atteint

T peut être vide :

1] Ex Si $\mu = \delta_x : A \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

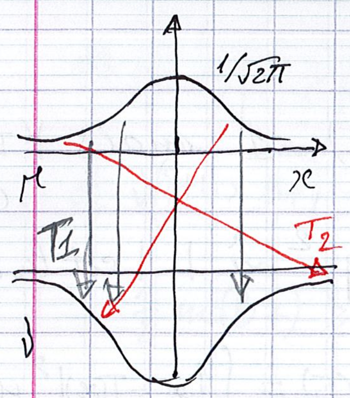
Alors $T_{\#}\delta_x = \delta_{T(x)}$ donc dès que $\nu \neq$ dirac $T = \emptyset$
par ex $\nu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$

2] Par contre $T(1) = T(2) = 0$ est dans $Tr(\nu, \mu)$:

$0_{\#}\nu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_0) = \mu$. ⇒ pas symétrique

3] **$T = Tr(\mu,\nu)$ pas tjs convexe :**

Ex $\mu = \mathcal{N}(0,1) = \nu$ dans $\mathbb{R}$ $\mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$



Alors $T_1 = id = -T_2 \in Tr_{\mu\nu}$

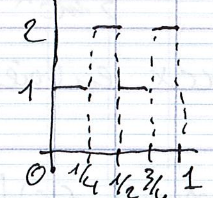
mais $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)_{\#}\mu = \delta_0$

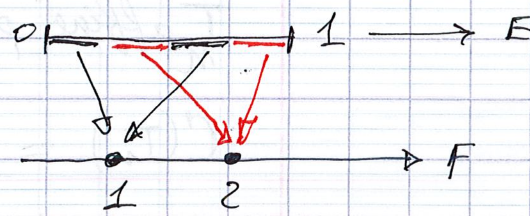
4] Pas de bonne topol rendant $Tr(\mu,\nu)$ compact et c continue.

Ex $d_\infty(T, T') = \sup_{x \in E} d(T(x), T'(x))$ n'est pas satisfaisant

Ex dans l'ex. $E = F = \mathbb{R}$ $\mu = \mathcal{U}([0,1])$ $\nu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$

$[0,1]$ coupé en 2^n intervalles





Soit $T_n \in Tr(\mu,\nu)$

$$d_1(T_n, T_{n+k}) = \int_{\mathbb{R}} |T_n - T_{n+k}| = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ ne va pas non plus

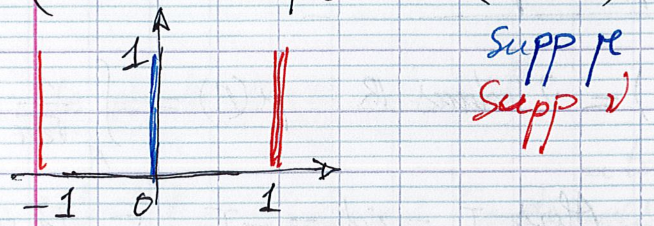
Pour n et $k \geq 1$, $d_\infty(T_n, T_{n+k}) = 1$

5] L'inf n'est pas toujours atteint.

$m = \mathcal{U}([0,1])$ $\quad \mu = \delta_0 \otimes m$

$\nu = \frac{1}{2}\left(\delta_{-1} \otimes m + \delta_1 \otimes m\right)$

(Rappel = $\forall \mu \in \mathcal{P}_E \ \nu \in \mathcal{P}_F$
$\exists! \ \mu \otimes \nu \in \mathcal{P}(E \times F) \ ; \ \mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A) . \nu(B)$)

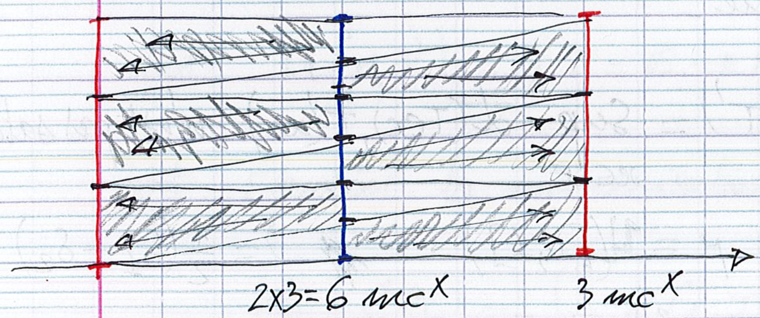


Montrons que $I = \inf_T C(T) = 1$ mais $\forall T \in Tr(\mu, \nu)$ $C(T) > 1$

On choisit $c(x,y) = |x-y|^2$ où $| \ |$ est la dist eucl. sur $\mathbb{R}^2$

Soit $T \in Tr(\mu, \nu)$. Alors $C(T) = \int_{\mathbb{R}^2} |x - T(x)|^2 \mu \, dx$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^2} 1 \, \mu(dx) = 1$$



$n = 3$

T_n affine par mcx envoie alternativt à dr et à g.

$$C(T_n) = \int |x - T_n(x)|^2 \mu \, dx \leq \int 1 + \frac{1}{n^2} \mu \, dx = 1 + \frac{1}{n^2}$$

$\to 1$

Si μ était tq $C(T) = 1$, on aurait

$$\int \big(\underbrace{|x - T(x)|^2} - 1\big) \mu \, dx = 0$$

or ≥ 1, donc on aurait $|x - T(x)|^2 = 1$ p.s.

donc pour la 2e coord $x_2 = T(x)_2$ p.s.

Soit $A_+ = \{x \ ; \ T(x)$ à droite$\}$ $\quad A_+ = \{0\} \times B_+$

L'un des 2 au moins parmi A_+ et $A_- = \{0\} \times [0 \ 1] \setminus A^+$

est de mes > 0 mais $\nu(\{-1\} \times B_+) = \frac{1}{2} m(B_+)$

et $\nu(\{+1\} \times B_+) = \mu\left(T^{-1}(\{+1\} \times B_+)\right) \geq \mu(\{0\} \times B_+) = m(B_+)$

$\frac{1}{2} m(B_+) \geq m(B_+) > 0$?!