et $a \in \mathbb{R}$ Aq $\begin{cases} \nu(\{x \in X / f(x) \geq a\}) \geq \frac{1}{2} \\ \nu(\{x \in X / f(x) \leq a\}) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ (19)

alors $\nu(\{x \in X \mid |f(x) - a| \leq r\}) \geq 1 - 2C \exp(-r^2/2\kappa)$

- De plus, le point précédent reste vrai en remplaçant a par $b := \int f d\nu$, en remplaçant $(2\kappa, 2C)$ par $(8\kappa, e^{\kappa^2\pi/\kappa})$.

② Tensorisation de $(T_2(c))$

$$\left.\begin{array}{l} (X, d, \nu) \text{ vérifie } (T_2(c)) \\ (\tilde{X}, \tilde{d}, \tilde{\nu}) \text{ ——— } (T_2(c)) \end{array}\right\} \Rightarrow (X \times \tilde{X}, \sqrt{d^2 + \tilde{d}^2}, \nu \times \tilde{\nu}) \text{ vérifie } (T_2(c)).$$

13/01/2022 :

I] Distance de Wasserstein ((X, d) espace métrique complet, séparable)

Sur $\mathcal{P}_p(X) = \{\mu \in \mathcal{P}(X) \mid \exists x_0 \in X, \int d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty\}$ $(p \geq 1)$

Rappel : $W_p(\mu, \nu)^p = \min_{\pi \in Marg(\mu,\nu)} \int_{X \times X} d(x,y)^p d\pi(x, y)$

① Mq $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$

À tout $\pi \in Marg(\mu, \nu)$, on peut associer $\overline{\pi} = transp_{\#}\pi$ où $transp(x, y) = (y, x)$

→ À voir : a) $transp_{\#}\pi \in Marg(\nu, \mu)$

b) $\int d^p \, d\pi = \int d^p \, d\overline{\pi}$

c) $\pi \longrightarrow \overline{\pi} \longrightarrow \overline{\overline{\pi}} = \pi$

a) Soit $\tilde{f} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue bornée

$(x,y) \longmapsto f(x)$

Or $\int \underbrace{\tilde{f}(x,y)}_{f(x)} \, d\,\mathrm{transp}\#\pi(x,y)$

thm de transfert

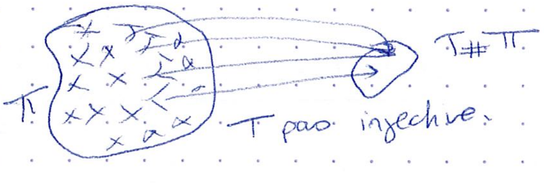
$= \int \underbrace{\tilde{f}\big(\underbrace{\mathrm{transp}(x,y)}_{=(y,x)}\big)}_{=\tilde{f}(y)} \, d\pi(x,y)$.

Comme $\mathrm{proj}_2\#\pi = \nu$, ceci vaut $\int f(y)\, d\nu(y)$.

Comme f est arbitraire on a identifie $\mathrm{proj}_1\#\overline{\pi} = \nu$

de même $\mathrm{proj}_2\#\overline{\pi} = \mu$, d'où $\overline{\pi} \in \mathrm{Marg}(\nu, \mu)$

Intuition quant à $\#$: Si π est la loi de (X,Y) ou bien des $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\mathrm{transp}\#\pi$ sera celle de $\mathrm{transp}(X,Y) = (Y,X)$ (celle des $\mathrm{transp}(X_n,Y_n) = (Y_n, X_n)$.



$\frac{1}{n} \sum^{n} \delta_{x_i}$

b) $\int d(x,y)^p \, d\underbrace{\mathrm{transp}\#\pi(x,y)}_{\overline{\pi}} = \int d\big(\underbrace{\mathrm{transp}(x,y)}_{(y,x)}\big)^p \, d\pi(x,y)$

$= \int d(y,x)^p \, d\pi(x,y)$

② $W_p(\mu,\nu) = 0 \iff \mu = \nu$

$\Leftarrow$ Si $\mu = \nu$ alors $\pi := (id, id)\#\mu$, $\mu \in \mathcal{P}(X)$

Montrons de 3 façons que $\pi \in \mathrm{Marg}(\mu, \underset{\mu}{\nu})$

En effet : • $\pi(A\times X) = \mu\left((id,id)^{-1}(A\times X)\right)$

$$= \mu(A)$$

• $\int \underbrace{f(x)}_{\tilde{f}(x,y)} d\pi = \int \underbrace{\tilde{f}(id(x), id(x))}_{f(x)} d\mu(x)$

• Si X a pour loi μ, π $(id, id)_\# \mu$ est la loi de $(id(X), id(X))$ et $proj_{1\#}\pi$ celle de $proj_1(id(X), id(X)) = X$, donc

$$proj_{1\#}\pi = \mu.$$

$\Longrightarrow$: Soit π optimal (= minimise le pb) dans $Marg(\mu,\nu)$

tq $\int \underbrace{d(x,y)^p}_{\geq 0} d\pi(x,y) = W_p(\mu,\nu)^p = 0.$

Alors π-p.p. $d(x,y) = 0$ et donc

$$\pi\left(\underbrace{\{(x,y)\in X\times X \;/\; y=x\}}_{Diag}\right).$$

$\pi(A\times B)$ $\left(\text{OBJ} : = (id,id)_\#\mu(A,B) \text{ car alors, } \underset{\pi = (id,id)_\#\mu}{\wedge}\ \mu = proj_{2\#}\pi = \mu\right)$

$$\pi(A\times B) = \pi\left((A\times B)\cap Diag\right)$$

$$= \pi\left(\{(x,x)\;/\; x\in A \text{ et } x\in B\}\right)$$

$$= \pi\left(((A\cap B)\times X) \cap Diag\right)$$

$$= \pi\left((A\cap B)\times X\right)$$

$$= \mu(A\cap B) = (id,id)_\#\mu(A\times B)$$

Version proba : Soit (X,Y) dont la loi est π optimal.

Alors $W_p(\mu,\nu)^p = \int d(x,y)^p d\pi = \int_\Omega d(x,y)^p (X,Y)_\# \mathbb{P}$

$= \mathbb{E}\left(d(X,Y)^p\right)$

Si c'est nul, alors $d(X,Y) = 0$ p.p.

et donc $X = Y$ p.p. et donc $\mu = X_\# \mathbb{P} = Y_\# \mathbb{P} = \nu$.

Pb de transport sous-forme proba

$$C(\mu,\nu) = \inf_{\substack{(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}) \\ (X,Y) : \Omega \to X \times Y \\ X \sim \mu,\ Y \sim \nu}} \mathbb{E}\left(c(X,Y)\right)$$

π habituel est $(X,Y)_\# \mathbb{P}$

(3) Inégalité triangulaire

Démo proba : μ, ν, η donnés. Soit π_{12} optimal pour transp. (μ,ν)
π_{23} ———— (ν,η)

But : $W_p(\mu,\eta) \leq \underset{\inf = \min}{W_p(\mu,\nu)} + \underset{\inf = \min}{W_p(\nu,\eta)}$

On a donc
$$W_p(\mu,\nu)^p = \int d(x,y)^p \, d\pi_{12}(x,y)$$
$$W_p(\nu,\eta)^p = \int d(y,z)^p \, d\pi_{23}(y,z)$$

(*) Supposons qu'il existe des VA $(X,Y,Z) : (\Omega ; \mathbb{P}) \to X \times X \times X$

tq $(X,Y)_\# \mathbb{P} = \pi_{12}$, $(Y,Z)_\# \mathbb{P} = \pi_{23}$

Alors $\pi_{1,3} := (X,Z)_\# \mathbb{P}$.

Alors π_{13} satisfait à

$$\left[\int \underbrace{d(x,z)^p}_{\leq [d(x,y)+d(y,z)]^p} d\pi_{13}(x,z)\right]^{1/p} = \left[\int_\Omega d(X,Z)^p \, d\mathbb{P}\right]^{1/p}$$

Minkowski
$$\leq \left[\left[\int_\Omega d(X,Y)^p \, d\mathbb{P} \right]^{1/p} + \left[\int_\Omega d(Y,Z)^p \, d\mathbb{P} \right]^{1/p} \right]$$

$$= W_p(\text{—}) + W_p(\text{—}).$$

Revenons sur (*) : "Gluing lemma"

Si $\pi_{12} \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$ et $\pi_{23} \in \mathrm{Marg}(\nu, \eta)$, Alors il existe $\pi_{123} \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu, \eta) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X \times X \times X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{proj}_1 \# \pi = \mu \\ \mathrm{proj}_2 \# \pi = \nu \\ \mathrm{proj}_3 \# \pi = \eta \end{array} \right\}$

et $\mathrm{proj}_{12} \# \pi_{123} = \pi_{12}$ et $\mathrm{proj}_{23} \pi_{123} = \pi_{23}$.

On va le démontrer à l'aide de noyaux de proba.

Déf : $k : X \times \mathcal{B}(Y)$ est un noyau entre X et Y si

1) $\forall x$, $\underbrace{k(x, \cdot)}_{\text{notation } k_x \in \mathcal{P}(Y)} \in \mathcal{P}(Y)$

2) $\forall B \in \mathcal{B}(Y)$, $x \mapsto k(x, B)$ est mesurable.

Notations :
- $k_x \equiv k(x, \cdot)$
- id est le noyau de $id(x, B) = \delta_x(B)$ $\quad (id_x = \delta_x)$ $= \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$.
- Si $\left| \begin{array}{l} k : X \times \mathcal{B}(Y) \to \mathbb{R}_+ \\ k' : X \times \mathcal{B}(Y') \to \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$

$k \times k'(x, \cdot) := k(x, \cdot) \times k'(x, \cdot) \in \mathcal{P}(Y \times Y')$.

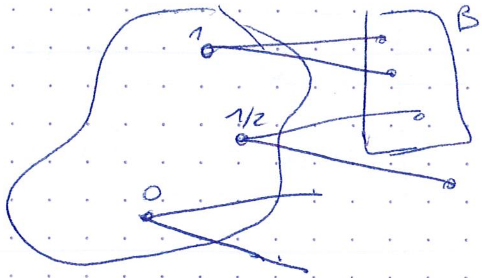
On peut pousser en avant à l'aide des noyaux vus comme des applications multivaluées pondérées :

Def : $\mu \circ k \in \mathcal{P}(Y)$ est défini par

$$\forall B \in \mathcal{B}(Y), \quad \mu \circ k(B) = \int k_x(B) \, d\mu(x)$$

Exemple :

$$k_x = \frac{1}{2} \delta_{T_1(x)} + \frac{1}{2} \delta_{T_2(x)}$$



$$\cancel{\Pi_{123} = \int k}$$