

I] Rappels et Compléments

Thm (de l'unique Brenier) :

(i) Soit $\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(\mathbb{R}^d)$ $\left(\int |x|^2 d\mu(x) < +\infty \right)$
 $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$

Alors il existe un unique plan de transport optimal pour le pb de transport de μ vers ν par le coût

$$c(x, y) = \frac{\|x - y\|^2}{2}$$

et il est de la forme $\pi = (\text{id}, \nabla \varphi) \# \mu$
où $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, convexe.

(ii) Soit $\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\text{convexe}} \mathbb{R}$

Alors $\pi := (\text{id}, \nabla \varphi) \# \mu$
est un (projeté) plan de T.O. entre μ et $\nabla \varphi \# \mu =: \nu$.

Thm 2 :

Soit c "gentille" (lsc / ou autre)
 φ et ψ tq $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$
 $\psi(y) - \varphi(x) \leq c(x, y)$

On pose $\Gamma := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d / \psi(y) - \varphi(x) = c(x, y) \}$

Si π dont les marges sont μ et ν avec $\varphi \in L^1(\mu)$, $\psi \in L^1(\nu)$.

satisfait $\tilde{\pi}(\Gamma) = 1$,

Alors π est optimal pour le pb de transport entre μ et ν et le coût c .

Démo: Soit $\mathcal{I}, \mathcal{J}, c, \Gamma$ et π .

Soit $\beta \in \text{Merg}(\mu, \nu)$ un coupleur de π .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c d\pi &= \int_{\Gamma} c d\pi \\ &= \int_{\Gamma} [\mathcal{J}(y) - \mathcal{I}(x)] d\pi(x, y) \\ &= \int \mathcal{J} d\nu - \int \mathcal{I} d\mu \\ &= \int \mathcal{J} d\nu - \int \mathcal{I} d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \int c d\beta &\geq \int \mathcal{J} - \mathcal{I} d\beta \\ &= \int \mathcal{J} d\nu - \int \mathcal{I} d\mu = \int c d\pi. \end{aligned}$$

C'est bien d'avoir de tels Γ (liés à $\mathcal{J} - \mathcal{I} \leq c$) pour reconnaître des PTS (entre leurs marges)

Truc pour agrandir Γ .

Γ est def pour (\mathcal{I}, Ψ) qu'on peut remplacer par $(\mathcal{I}, P_c \mathcal{I})$ où $P_c \mathcal{I}(y) := \inf_x c(x, y) + \mathcal{I}(x)$

Car alors $P_c \mathcal{I}(y) - \mathcal{I}(x) \leq c(x, y)$ reste vrai et

$$\mathcal{I}(y) - \mathcal{I}(x) = c(x, y) \text{ entraîne } P_c \mathcal{I}(y) - \mathcal{I}(x) = c(x, y)$$

Donc $\Gamma_{\mathcal{I}, P_c \mathcal{I}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid P_c \mathcal{I}(y) - \mathcal{I}(x) = c(x, y)\}$

Contient le Γ initial

Avec ce "truc" comme l'image par P_c donne des fonctions spéciales, on peut se limiter à certaines classes de fcts qui dépendent de c .

Ex 1: $c(x, y) = d(x, y) = |y - x|$. On peut choisir directement \mathcal{I} et Ψ , 1-lip. et même $\mathcal{I} = \Psi$.

Ex 2: Si $c(x, y) = s(x, y) = -\langle x, y \rangle$.

On peut choisir directement \mathcal{I} convexe et Ψ concave

$$(f(x) + f^*(y)) \geq \langle x, y \rangle$$

Ex 3: Pour $c(x, y) = \frac{|y-x|^2}{2}$, l'équation

$$\mathcal{I}(y) - \mathcal{I}(x) \leq c(x, y) = \frac{|x|^2}{2} - \langle x, y \rangle + \frac{|y|^2}{2}$$

Peut s'écrire $(\Psi(y) - \frac{|y|^2}{2}) - (\Psi(x) + \frac{|x|^2}{2})$

$$\leq -\langle x, y \rangle$$

J'affirme sans démontrer que P_c^- et Q_c^- transformations produisent au décalage de $\frac{|x|^2}{2}$ près les mêmes résultats que pour $S(x, y) = -\langle x, y \rangle$.

Ainsi dans l'équation $\Psi - \Psi \leq c$. On peut supposer $\begin{cases} y \mapsto \Psi(y) - \frac{|y|^2}{2} & \text{concave} \\ x \mapsto \Psi(x) - \frac{|x|^2}{2} & \text{convexe.} \end{cases}$

En fait, les fcts c -convexe pour $c = \frac{1 \cdot |x|^2}{2}$ sont les fcts Ψ dites "1-convexe" (re)
"Hess $\Psi \geq Id_d$ ".

De même Ψ est c -concave si elle est "1-concave" (re)
"Hess $\Psi \leq Id_d$ ".

démo utile dans la théorie :

Soit $P_c, P_{c, \Psi}$ sur Ψ est 1-convexe. Soit $(x_0, y_0) \in \Gamma$ (s'écrit aussi $y_0 \in \partial_c \Psi(x_0)$).
Si Ψ est dérivable en x_0 , alors

$$y_0 \text{ est connue par l'équation } y_0 = x_0 + \nabla \Psi(x_0). \quad (= \nabla (\Psi + \frac{1 \cdot |x|^2}{2})(x_0))$$

Démo : On a $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\begin{cases} P_c \Psi(y_0) - \Psi(x) \\ \leq \langle x, y_0 \rangle \end{cases}$

(avec = quand $x = x_0$.)

Donc $x \mapsto \mathcal{L}(x) + c(x, y_0)$ atteint son min
(= $\rho_c \mathcal{L}(y_0)$) en $x = x_0$.

Comme elle est différentiable en x_0 , on

trouve $\nabla \mathcal{L}(x_0) + (x_0 + y_0) = 0$

et donc $y_0 = x_0 + \nabla \mathcal{L}(x_0)$. ▮

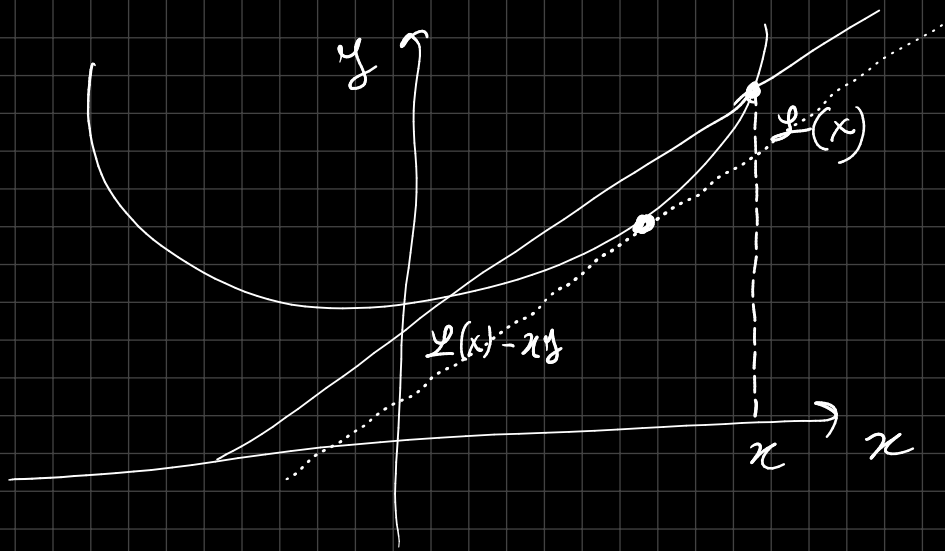
Pour la dimension 1 : Comme le pb pour $c = \frac{1 \cdot 1^2}{2}$ est équivalent à celui pour

($c = s(x, y) = -xy$), les Γ donnés par
($\mathcal{L}, \rho_c \mathcal{L}$) où \mathcal{L} est c -convexe rejoignent
la théorie des sous-diff. au sens classique.

$$\partial_s \mathcal{L}(x) = \left\{ y \mid -\mathcal{L}^*(y) - \mathcal{L}(x) \leq -xy \right\}$$

On associe donc à x les y pour
lesquels le sup dans la def de \mathcal{L}^* est
atteinte en x .

$$\begin{aligned} \text{On rappelle } \mathcal{L}^*(y) &= \sup_x xy - \mathcal{L}(x) \\ &= - \inf_x \mathcal{L}(x) - xy \end{aligned}$$



Graphiquement, on découvre que

$$\partial_S \mathcal{I}(x) = [\mathcal{I}'_-, \mathcal{I}'_+] \quad (\neq \emptyset \text{ si } \mathcal{I} \text{ convexe})$$

Thm 1 (i): Soit $\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(\mathbb{R})$, $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,
 $\exists \mathcal{I}$ convexe tq $(\text{id}, \mathcal{I}) \# \mu$ est
 l'unique plan de transport optimal.
 (Note: "fix" is written below the arrow from \mathcal{I}' to μ)

Thm 1 (ii): Soit T croissante, $\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(\mathbb{R})$.

En introduisant $\mathcal{I}(x) = \int_0^x T(t) dt$ on voit que $(\text{id}, T) \# \mu$ est optimal entre μ et $T \# \mu$.

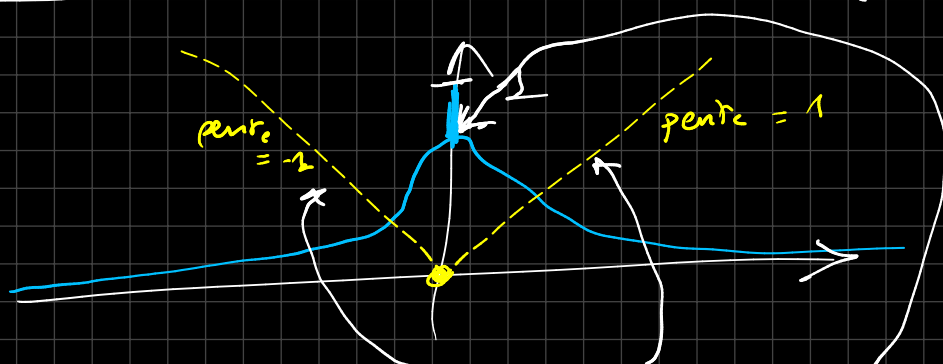
Rq: En fait, on peut remplacer " $\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(\mathbb{R})$ " par " $\forall x \in \mathbb{R}, \mu(\{x\}) = 0$ " avec les mêmes conclusions.

Le km 1 (ii) et 2 se combinent bien du fait que pour une fct convexe Ψ ,

$$\forall x, \exists \Psi(x) \neq \emptyset.$$

On peut donc "penser en avant / transporter" μ (sans hypothèse sur μ) par $\exists \Psi$ comme s'il s'agissait d'un gradient.

Illustration: $\Psi(x) = |x|$ et $\mu = \frac{1}{2} \omega(0,1) + \frac{1}{2} \delta_0$



$$\nu = \frac{1}{4} \delta_{-1} + \frac{1}{4} \delta_{1} + \eta \quad \text{avec } \eta \left(\begin{matrix} (-1;1) \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

↑
n'importe laquelle.