Nicolas JUILLET GTTO Jeudi 10 nov 2022, 13h45

I Rappels

<u>th</u> (Brenier) Si ($\mu \ll \mathcal{L}_d$ (mes de Lebesgue) et ν) $\in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, i.e. $\int \|x\|^2 d\mu(x)$ et $\int \|y\|^2 d\nu y < +\infty$ alors $\exists \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexe avec $\mu(\overset{\circ}{\overbrace{\{\varphi < \infty\}}}) = 1$ et $\pi_\varphi := (id, \nabla\varphi)_\# \mu$ minimise $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|y-x\|^2 d\pi(x,y)$ parmi tous les $\pi \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$

Réciproquement, si $\exists \Psi$ convexe tq $\mu(\overset{\circ}{\overbrace{\{\Psi < +\infty\}}}) = 1$ et $\int \|\nabla\Psi(x) - x\|^2 d\mu(x) < \infty$ alors $\pi_\Psi := (id, \nabla\Psi)_\# \mu \in \mathrm{Marg}(\mu, \eta)$ avec $\eta = \nabla\Psi_\# \mu$ est un plan de transport optimal en μ et η

<u>th</u> (Monge-Ampère) si $\eta = \nabla\Psi_\# \mu \ll \mathcal{L}_d$ alors μ-p.p.(dx) $\boxed{f_\eta(\nabla\Psi(x)) \det(\mathrm{Hess}\,\Psi)(x) = f_\mu(x)}$

où f_η est la densité de η et où $\mathrm{Hess}\,\Psi$ est la dérivée 2nde de Ψ au sens d'Alexandrov.

c'est <u>l'éq. de Monge-Ampère</u>. expliqué p. 88

(η est noté ν)

Preuve dans le cas où $T := \nabla\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un $\mathcal{C}^1$ difféo

Par déf de $T_{\#}\mu = \nu$, on a $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ $\forall A$ mesurable

i.e. $\int \mathbb{1}_A d\nu = \int \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} d\mu$

mais $\mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\int \mathbb{1}_A y \, d\nu y = \int \mathbb{1}_A(T(x)) d\mu(x)$

donc $\forall \lambda_i, A_i$ $\int \sum \lambda_i \mathbb{1}_{A_i} d\nu$

$\Rightarrow \forall h$ borélienne $\int h \, d\nu = \int h \circ T \, d\mu$

Le chg^t de var. $y = T(x)$ donne

$\int h(y) f_\nu(y) dy = \int h(T(y)) f_\nu(T(x)) \, dT(x)$

or $\text{Jac}\, T(x) = |\det DT(x)| = \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\mathcal{L}_d(T(B_\infty(x,r)))}{\mathcal{L}_d(B_\infty(x,r))}$ = m̂ chose

avec la norme $\| \|_2$ au lieu de $\| \|_\infty$

Fin du calcul :

$\int h(y) f_\nu(y) dy = \int h(\nabla\psi(x)) f_\nu(\nabla\psi(x)) |\det \underbrace{(D\nabla\psi)}_{= \text{Hess}\,\psi}(x)| dx$

$\forall h$ borélienne bornée

et si c'est vrai pour $h(\nabla\psi(x))$ $\forall h$ borel. bornée

$\Rightarrow$ c'est vrai pour $\tilde{h}(x)$ $\forall \tilde{h}$ borel. bornée

donc μ-p.p. en x $f_\mu(x) = f_\nu(\nabla\psi(x)) \det|\text{Hess}\,\psi(x)|$

2 pbs : T n'est pas un difféo donc Ⓐ T pas bijectif a priori

et Ⓑ T n'est pas $\mathcal{C}^1$, et m̂ a priori pas continu.

Pour le pb (A), si $\mu, \nu \ll \mathcal{L}_d$ et $\in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$

avec $\nu = \nabla\psi_{\#}\mu =: T_{\#}\mu$ alors $(id, T)_{\#}\mu$ est optimal

De m̂ $\exists T'$ tq $(T', id)_{\#}\nu$ optimal

Par unicité $(id, T)_{\#}\mu = (T', id)_{\#}\nu$ noté π

$\pi(\underbrace{graph(T) \cap graph^*(T')}_{=:G}) = 1$ et si $(x,y) \in$ cette $\cap$ notée G $\Rightarrow$ $y = T(x)$ et $x = T'(y)$

de + $\mu(proj^1 G) = \nu(proj^2 G) = 1$

Pour (B), Th de Rademacher : si f U ouvert $\subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est local^t lip. alors $\mathcal{L}_d(\underbrace{\{x \in U \text{ tq } f \text{ pas différentiable en } x\}}) = 0$

De + (2ème rappel) si $\varphi = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est convexe alors φ est local^t lip sur $\mathrm{Dom}\,\varphi := \mathring{\overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R})}}$

<u>Déf</u> $\varphi = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite 2 fois dérivable au sens d'Alexandrov en x_0 si :

(i) φ est dérivable en x_0

(ii) $\exists \Lambda \in Sym_{d\times d}(\mathbb{R})$ tq $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\left(\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{p \in \partial\varphi(x)} \|p - \nabla\varphi(x_0) - \Lambda(x - x_0)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|\right)$$

où $\partial\varphi(x)$ est le sous-différentiel de x :

$$\partial\varphi(x) = \{p \in \mathbb{R}^d ;\ \forall h \in \mathbb{R}^d\ \varphi(x+h) \geq \varphi(x) + \langle p | h\rangle + o(\|h\|)\}$$

$(\partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$ si ∇ différentiable en $x)$