Armand LEY — Yann — Jeudi 5 mai 2022

13^35

Théorème de BRENIER

Énoncé Soit $\mu \in \mathcal{P}_2^{ac}(\mathbb{R}^n)$ et $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$

ac : absol^t cont. p/r à Lebesgue

$\mathcal{P}_2$: a des moments d'ordre 2

$c_2(x,y) := \|x-y\|^2$ ($\|\cdot\|$ norme euclidienne)

(i) Tous les plans de transport optimaux sont de type Monge : si $\pi \in \mathcal{O}_2(\mu,\nu)$ alors $\exists\, T \in \mathcal{T}(\mu,\nu)$ tq

$\mathcal{O}_2$: ens. des pl. de transp. optim^x

$$\pi = \pi_T := (id, T)_{\#}\mu$$

De plus $\exists\, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \infty$ s.c.i. convexe propre tq $T = \nabla\varphi$ μ-p.s., i.e.

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n ;\ x \in \mathring{\mathrm{dom}}\,\varphi,\ \varphi \text{ différentiable en } x \text{ et } T(x) = \nabla\varphi(x)\right\}\right) = 1$$

(ii) $|\mathcal{O}_2(\mu,\nu)| = 1$ cet unique pl. de transp. opt. est noté π^*

(iii) $\forall\, T_1, T_2$, si $\pi^* = \pi_{T_1} = \pi_{T_2}$, alors $T_1 = T_2$ μ-p.s.

Preuve Rq préliminaire : si $\pi \in \mathcal{O}_2(\mu,\nu)$, alors $\pi \in \mathcal{O}_c(\mu,\nu)$ (i.e. optimal) pour le coût $c(x,y) = -x\cdot y$

En effet $J_{c_2}(\pi) = \int |x-y|^2\, \pi(dx,dy)$

$$= \int \left(|x|^2 + |y|^2 - 2\,x\cdot y\right) \pi(dx,dy)$$

$$= \underbrace{\int |x|^2 \mu(dx) + \int |y|^2 \nu(dy)}_{\text{Const.}} + 2\, J_c(\pi)$$

D'après le th de dualité (cf pp 52-59)

$\exists\, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i. convexe propre tq

$\pi(\partial_c \varphi)$. Soit $\Omega_{diff} = \{x \in \overset{\circ}{\mathrm{dom}}\, \varphi \,;\, \varphi \text{ diff en } x\}$ ← intérieur

Étape 1 : But = montrer que $\mu(\Omega_{diff}) = 1$.

Soit $\Gamma = \partial_c \varphi$ et $\Gamma_1 = 1^{ère}$ proj de Γ, i.e.

$$\Gamma_1 = \{x \,;\, \exists y, (x,y) \in \Gamma\}$$

Si $x \in \Gamma_1$ alors $\exists y \in \mathbb{R}^n$; $y \in \partial_c(x)$ i.e.

$$\varphi(x) + c(x,y) \leq \varphi(z) + c(z,y) \quad \forall z$$

mais φ est propre donc $\not\equiv +\infty$ donc $\varphi(x) \neq +\infty$
donc $x \in \mathrm{dom}\, \varphi$

Ainsi $\Gamma_1 \subseteq \mathrm{dom}\, \varphi$, donc

$$\mu(\mathrm{dom}\, \varphi) \geqslant \mu(\Gamma_1) = \pi(\Gamma_1 \times \mathbb{R}^n) \geqslant \pi(\Gamma) = 1$$

Comme φ est convexe dom φ est convexe donc
$\mathcal{L}^n(\partial\, \mathrm{dom}\, \varphi) = 0$. Comme $\mu \ll \mathcal{L}^n$, on obtient

↑ frontière ↑ abst cont.

mes de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

$$\mu(\partial\, \mathrm{dom}\, \varphi) = 0.$$

d'où $\mu(\overset{\circ}{\mathrm{dom}}\, \varphi) = 1$

De plus convexe ⇒ local^t lip ⇒ par Rademacher
différentiable p.s.

Ainsi $\mathcal{L}^n(\{x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{dom}\,\varphi}} ; \varphi$ pas diff en $x\}) = 0$

Comme $\mu \ll \mathcal{L}^n$, $\mu($ ñ chose $) = 0$

i.e. $\mu(\Omega_{diff}) = 1$. $\square$

<u>Étape 2</u> Posons $T(x) = \begin{cases} \nabla\varphi(x) & \text{si } x \in \Omega_{diff} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrons que $\{(x, T(x)) ; x \in \Omega_{diff}\} = \partial_c \varphi \cap (\Omega_{diff} \times \mathbb{R}^n)$

Ça suffit pour avoir $\pi = \pi_T$

$\boxed{\subseteq}$ Si $x \in \Omega_{diff} \Rightarrow \begin{array}{l} T(x) = \nabla\varphi(x) \\ \partial_c\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\} \end{array} \Rightarrow (x, T(x)) \in \partial_c \varphi$

$\boxed{\supseteq}$ Si $(x,y) \in \partial_c \varphi \cap (\Omega_{diff} \times \mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_c\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$

or $(x,y) \in \partial_c\varphi$ donc $y = T(x)$

<u>Étape 3</u> (ii) (<u>Unicité</u>) Soit $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{O}_2(\mu,\nu)$ et soit

$\pi_3 = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$. C'est aussi un plan de transp. optimal par linéarité de $\int$ $=$

$\int c\, d\pi_3 = \frac{1}{2}\left(\int c\, d\pi_1 + \int c\, d\pi_2\right) = \frac{1}{2}\left(W_2(\mu,\nu) + W_2(\mu,\nu)\right) = W_2(\mu,\nu)$

D'après le (i) $\exists T \in \mathcal{T}_2(\mu,\nu)$; $\pi_3 = \pi_T$

Alors $\pi_3(G_T) = 1$, où G_T est le graphe de T

$\Rightarrow \pi_1(G_T) = \pi_2(G_T) \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_T$

Étape 4 : (iii) Supposons $\pi_{T_1} = \pi_{T_2}$ et calculons $\mu(T_1 \neq T_2)$

$$\mu(T_1 \neq T_2) = \int \mathbb{1}_{\{T_1(x) \neq T_2(x)\}} \mu(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{y \neq T_2(x)\}} d\pi_{T_1}(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{y \neq T_2(x)\}} d\pi_{T_2}(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{T_2(x) \neq T_2(x)\}} d\mu(x) = 0$$

$$\left(\int F(x,y)\, \pi_T(dx,dy) = \int F(x,T(x))\, \mu(dx) \right)$$

Réciproque du th de Brenier

Énoncé : Soit $\mu \in \mathcal{P}_2^{a,c}(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$

Si $T \in Tr(\mu,\nu)$ et si $\exists \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup +\infty$ s.c.i. convexe propre tq $T = \nabla\varphi$ p.s. alors $\pi_T \in \mathcal{O}_2(\mu,\nu)$.

Preuve : Soit $A = \{ x \in \Omega_{diff} ; T(x) = \nabla\varphi(x) \}$

On a $\pi_T(A \times \mathbb{R}^n) = \mu(A) = 1$ donc

$$\pi_T(\partial_c\varphi) = \pi_T((A \times \mathbb{R}^n) \cap \partial_c\varphi) = \pi_T\left((A\times\mathbb{R}^n) \cap \{(x,\nabla\varphi(x)) ; x \in \Omega_{diff}\}\right)$$

$$= \pi_T \{ x\, T(x) ; x \in \mathbb{R}^n \cap (A \times \mathbb{R}^n)\}$$

(car $x \in \Omega_{diff}$ autom^t si $x \in A$)

$$= \pi_T\{(x,T(x)) ; x \in \mathbb{R}^n\} \quad (\text{car } \pi_T\, A \times \mathbb{R}^n = 1)$$

$= \pi_T(G_T)$ par déf $= 1$ car c'est un plan de Monge, donc π_T est optimal par le th de dualité

Une dernière proposition :

Soit $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2^{a.c.}$ $\begin{cases} T \in Tr(\mu,\nu) \\ S \in Tr(\nu,\mu) \end{cases}$ tq

$\pi_T \in \mathcal{O}_2(\mu,\nu)$ $\pi_S \in \mathcal{O}_2(\nu,\mu)$

Alors $S \circ T(x) = x$ μ-p.s. et $T \circ S(y) = y$ ν-p.s.

Preuve : Montrons que $(id, T)_\# \mu = (S, id)_\# \nu$

On a $\int |x-y|^2 d(S,id)_\# \nu(x,y) = \int |S(y) - y|^2 \nu(dy)$

$= W_2(\nu,\mu) = W_2(\mu,\nu)$ donc $(S, id)_\# \nu \in \mathcal{O}_2(\mu,\nu)$

Ainsi $\forall F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mesurable

$$\int F(x, T(x)) \mu(dx) = \int F(S(y), y) \nu(dy)$$

Pour $F(x,y) = |T(x) - y|^2$, on obtient

$0 = \int |T(x) - T(x)|^2 \mu(dx) = \int |T(S(y)) - y|^2 \nu(dy)$

d'où $T \circ S = id$ ν-p.s.

idem pour $S \circ T = id$ μ-p.s. avec $F(x,y) = |x - S(y)|^2$