$W_2(\mu_A, \mu_{\overline{A_r}}) \geqslant r$

Soit $r_0 := \sqrt{c \log \frac{1}{\mu(A)}}$

Alors $r \leq W_2(\mu_A, \mu_{\overline{A_r}}) \leqslant \underbrace{\sqrt{c \log(1/\mu(A))}}_{r_0} + \sqrt{c \log(1/\mu(\overline{A_r}))}$

$\Rightarrow \mu(\overline{A_r}) \leq \exp\left(-\frac{1}{c}(r-r_0)^2\right)$

$r^2 = (r_0 + (r-r_0))^2 \leq 2(r_0^2 + (r-r_0)^2)$

$\Rightarrow (r-r_0)^2 \geqslant \frac{1}{2} r^2 - r_0^2$

Ainsi, pour $r \geqslant r_0$ $\mu(\overline{A_r}) \leqslant \exp(-\frac{1}{2c} r^2) \underbrace{\exp(\frac{1}{c} r_0^2)}_{\mu(A)}$

et pour $r \leq r_0$ $\mu(\overline{A_r}) \leq 1 \leqslant \underbrace{\exp(\frac{1}{2c} r_0^2)}_{\frac{1}{\sqrt{\mu(A)}} \leqslant \sqrt{2} \text{ si } \mu(A) \geqslant \frac{1}{2}.} \exp(-\frac{1}{2c} r^2)$

Nicolat JUILLET — Je 3 fév. 2022, 13 30

Géodésiques et barycentres de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$

I Rappel

Dans $\mathbb{R}^d$, un barycentre de $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ de poids $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $(\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1)$ est le point $b := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Soit $f = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $y \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i |y - x_i|^2$ norme eucl.

f est cont et coercive (i.e. $\to +\infty$ si $|y| \to +\infty$)

donc atteint ~~son~~ min en au moins 1 pt

et, comme f est differentiable, et $Df(y) = 2 \sum_{i=1}^n \lambda \langle y - x_i | \cdot \rangle$ ne s'annule qu'en $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$,

c'est le min recherché

Déf $(\mathcal{X},d)$ métrique. b est un baryc. de $(x_i,d_i)_{1\leq i\leq n}$ ssi b minimise $f = y \mapsto \sum_{i=1}^{n} d_i\, d(x_i,y)^2$

Rq Pas d'associativité en g$^{\underline{al}}$

Pas d'unicité en g$^{\underline{al}}$ (par ex. courbure <0)

À voir : si $\mathcal{X}$ est un e.v.n. $\exists!$ ssi $B(0,1)$ strict$^{\underline{t}}$ convexe ?

Déf $\gamma : [0,1] \to (\mathcal{X},d)$ est une <u>géodésique</u> ssi
$\forall s,t \in [0,1] \quad d(\gamma(s),\gamma(t)) = |s-t|\, d(\gamma(0),\gamma(1))$

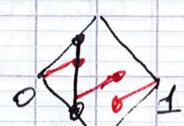
(ici paramétr^{o} sur $[0,1]$ et à vitesse constante)

Rqs 1) Toutes les inég triang entre $\gamma(s),\gamma(t),\gamma(u)$ sont des $=$
i.e. les triangles d'une géod sont plats

2) Si $d(\gamma(0),\gamma(1)) = 1$ γ est un plong$^{\underline{t}}$ isométrique

3) Si γ géod et $d \in [0,1]$ alors $\gamma(d)$ est un baryc. de $(\gamma(0), 1-d), (\gamma(1), d)$

Réciproque fausse si pas $\exists!^{\underline{té}}$ du baryc.



$\gamma(d)$ même pas cont.

4) Soit $y \in \mathcal{X}$ $\quad f(y) = (1-d)\, d(\gamma(0),y)^2 + d\, d(\gamma(1),y)^2$

$f(y) = \left(d(\gamma(0),y) + d(\gamma(1),y)\right)^2 \left(d(1-t)^2 + (1-d)t^2\right)$ avec

$t = \dfrac{d(\gamma(0),y)}{d(\gamma(0),y) + d(\gamma(1),y)}$ $\quad \geq d(\gamma(0),\gamma(1))^2 \left[(1-d)\, d(0,t)^2 + d\, d(1,t)^2\right]$

(par $\exists!^{té}$ du baryc. ds $\mathbb{R}$)

avec $=$ ssi y entre $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ et $t = d = \dfrac{d(\gamma(0),y)}{d(\gamma(0),y) + d(\gamma(1),y)}$

C'est le cas lorsque $y = \gamma(d) = \gamma(t)$

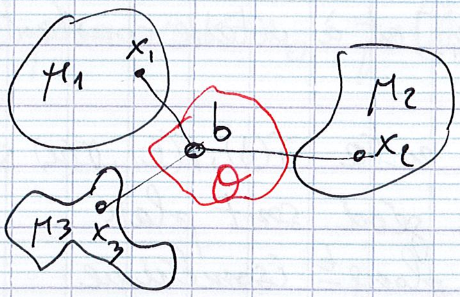
$\boxed{\text{II Barycentre de } \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)}$

Déf $W_1(\mu,\nu) = \inf_{\pi \in \mathrm{Marg}(\mu,\nu)} \sqrt{\int |y-x|^2 \, d\pi(x,y)}$

Prop $\theta \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ est un baryc de $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de poids $\vec{\lambda} = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ ssi $\exists\, \pi \in \mathrm{Marg}\, \mu_1 \cdots \mu_n \subset \mathcal{P}(\underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{n \text{ fois}})$ qui minimise le coût $c_{\vec{\lambda}}(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i<j} |\lambda_i x_i - \lambda_j x_j|^2$ avec $\theta = \mathrm{Bar}_{\vec{\lambda}\#}\pi$,

où $\mathrm{Bar}_{\vec{\lambda}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

Ex



$b = $ Isobaryc. $x_1\, x_2\, x_3$

$\pi = (X_1, X_2, X_3)_\# \mathbb{P}$

i.e. $\forall \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i W_2(\nu,\mu_i)^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i W_2(\theta,\mu_i)^2$

Cas spécial 1 : $n=2$ Si μ_λ est sur une géod entre μ_0 et μ_1

i.e. baryc. de $(\mu_0, 1-\lambda)$ et (μ_1, λ)

$\theta = \mathrm{Bar}_{(1-\lambda,\lambda)\#}\pi$ où π est un transport optimal entre μ_0 et μ_1 pour le coût $c(x,y) = \|(1-\lambda)x - \lambda y\|^2$

Or $\int \|(1-\lambda)x - \lambda y\|^2 \, d\pi(x,y)$

$= \underbrace{\int (1-\lambda)\|x\|^2 \, d\pi}_{= fn(\mu_0) \text{ seul}^t} + \underbrace{\int \lambda^2 \|y\|^2 \, d\pi}_{= fn(\mu_1)} - 2\lambda(1-\lambda) \int \langle x | y \rangle \, d\pi$

(pour $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ uniqu^t !)

Ainsi les minimisants de $\pi \in \mathrm{Marg}(\mu_0,\mu_1) \mapsto \int \|(1-\lambda)x - \lambda y\|^2 d\pi$
sont exact^t les maximiseurs de $\pi \mapsto \int \langle x | y \rangle d\pi$
et ne dependent donc pas de λ :
ce sont aussi les minimiseurs de $\pi \mapsto \int \|x-y\|^2 d\pi(x,y)$

<u>Cas spécial 2</u> : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ Alors π minimise le transport pour le coût $\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2$

<u>Ex</u> $X \sim \mathcal{L}([0,1])$ $Y = -X$ $\Rightarrow \left(\frac{X+Y}{2}\right) \# \mathbb{P} = \delta_0$

mais avec $Z = X - 1$ $\frac{X+Z}{2} \sim \mathcal{L}([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$

$W(\tilde{\mu}_0, \delta_0) + W(\mu_1, \delta_0) = \int_0^1 x^2 + \int_0^1 (-x^2) = \frac{2}{3}$

<u>Elsa CAZELLES</u> <u>Je 3 fév 2022, 15^{00}</u>

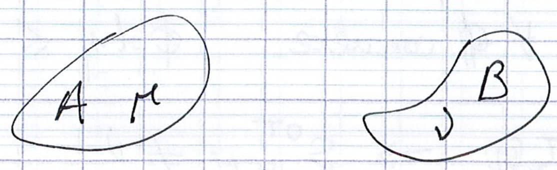
$\boxed{\text{Une nouvelle notion de barycentre pour les distrib. de proba basées sur le transport de masse optimal faible}}$

avec Felipe ... et Joachim ... , Chili

Image = mesure de proba $\min_{P} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d(P, \mathbb{M}_i)$

$A = \{x \in \mathcal{X} \,;\, T(x) \in B\}$ $T_\# \mu = \nu$

$\mu(A) = \nu(B)$



<u>Pb de Monge</u> $W_2(\mu,\nu) = \left(\min_{T \in T_{\mu\nu}} \int_{\mathbb{R}^d} \|x - T(x)\|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$