(suite de la p. 10)

Armand LEY — Jeudi 2 déc. 2021, $13^{\underline{30}}$

Monge - Kantorovitch

Les 5 problèmes se posant pour Monge disparaissent pour M-K :

1) $\mathrm{Marg}(\mu, \nu) \neq \emptyset$ car $\mu \otimes \nu \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$

Preuve : Soit $A \subseteq E$; alors

$$(\mu \otimes \nu)(A \times F) = \mu(A)\,\nu(F) = \mu(A)$$

De même $\forall B \subseteq F$ $(\mu \otimes \nu)(E \times B) = \mu(B)$

2) $\mathrm{Marg}(\mu, \nu)$ est convexe

Preuve Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\pi, \pi' \in \mathrm{Marg}(\mu, \nu)$.
Pour tout $A \subseteq E$, $(\alpha\pi + (1-\alpha)\pi')(A \times F) = \alpha\pi(A \times F) + (1-\alpha)\pi'(A \times F) = \alpha\mu(A) + (1-\alpha)\mu(A) = \mu(A)$ et de même $\forall B \in F$ $(\alpha\pi + 1-\alpha\,\pi')(E \times B) = \mu(B)$.

3) $\mathrm{Marg}(\mu, \nu)$ est symétrique :

Notation : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Marg}\,\mu\,\nu & \longrightarrow & \mathrm{Marg}(\nu, \mu) \\ \pi & \longmapsto & \mathrm{inv}_{E \times F\,\#}\pi \end{array}$

où $\mathrm{inv}_{E \times F} \begin{array}{c} E \times F \to F \times E \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{array}$

Alors φ est une bijection de réciproque

$$\varphi^{-1} = \tilde{\pi} \longmapsto \mathrm{inv}_{F \times E\,\#}\,\tilde{\pi}$$

En effet :

- φ est bien définie, i.e. $\varphi(\pi) \in \mathrm{Marg}(\nu, \mu)$:
$\forall B \subseteq F$ $\varphi(\pi)(B \times E) = \pi(E \times B) = \nu(B)$ et de m̂
$\forall A \subseteq E$ $\varphi(\pi)(F \times A) = \mu(A)$
- avec la not° φ^{-1} ci-dessus, $\varphi^{-1}(\varphi(\pi)) = \mathrm{inv}_{F \times E\,\#}(\mathrm{inv}_{E \times F\,\#}\pi)$
$= (\mathrm{inv}_{F \times E} \circ \mathrm{inv}_{E \times F})_{\#}(\pi) = \pi$ et de même $\varphi(\varphi^{-1}(\pi)) = \pi$.

Notations : i) $\tilde{c} = c \circ inv_{F\times E}$

ii) $W_c\, \mu\, \nu = \inf_{\pi \in Marg\, \mu\nu} J_c(\pi)$ où

$$J_c(\pi) = \int_{E\times F} c\, d\pi$$

iii) $\mathcal{O}_c(\mu,\nu) = \{$ sols du pb de M-K pour les données (c, μ, ν) $\}$

Lemme $J_c(\pi) = J_{\tilde{c}}(inv_{E\times F\,\#}\, \pi)$

Preuve $J_{\tilde{c}}(inv_{E\times F\#}\, \pi) = \int_{F\times E} \tilde{c}\, d(inv_{E\times F\#}\, \pi)$

$$= \int_{E\times F} (c \circ inv_{F\times E}) \circ inv_{E\times F}\, d\pi = \int_{E\times F} c\, d\pi = J_c(\pi)$$

Rappel si $T : E \to F$

$$T_\# : \mu \in \mathcal{P}(E) \longmapsto T_\# \mu \in \mathcal{P}(F)$$

$\forall f : E \to \mathbb{R}_+$

$$\int_F f\, dT_\# \mu = \int_E f \circ T\, d\mu$$

Pour $f = \mathbb{1}_B$, $B \subseteq F$, on obtient $T_\# \mu\, B = \mu(T^{-1}(B))$
car $\mathbb{1}_B \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(B)}$.

Conséquences

i) Le (c,μ,ν)-pb de M-K est $\Longleftrightarrow$ $(\tilde{c}, \nu, \mu)$-pb de M-K.

En effet φ induit une bijection de $\mathcal{O}_c(\mu,\nu)$ vers $\mathcal{O}_{\tilde{c}}(\nu,\mu)$
et $W_c(\mu,\nu) = W_{\tilde{c}}(\nu,\mu)$

ii) Si $E = F$ et si c est symétrique, alors
$W_c(\mu,\nu) = W_c(\nu,\mu)$

iii) si $E=F$ et $c(x,y) = d(x,y)^p$, $p \geqslant 1$, d distance, soit $W_p(\mu,\nu) := W_c(\mu,\nu)^{1/p}$
Alors W_p est une distance sur l'ens. des mesures de proba sur E, appelée <u>distance de Wasserstein</u>.

4) <u>Existence d'un minimiseur</u> :

<u>Déf</u> La topol de la cv faible sur $\mathcal{P}(X)$ est la plus petite topol. rendant les appl. K_φ continues, où

$$K_\varphi = \mu \longmapsto \int_X \varphi \, d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_b^0(X)$$
(cont., bornée)

On note $(\mu_n) \xrightarrow{f} \mu$ ou $(\mu_n) \longrightarrow \mu$
si $\forall f \in \mathcal{C}_b^0(X) \quad \left(\int f d\mu_n\right) \to \int f d\mu$

La topol de la cv faible est métrisable : c'est la même topol. que celle donnée par la dist de Wasserstein.

<u>Déf</u> Une partie $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ est dite <u>tendue</u> si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \subset\subset X \ \forall \mu \in A \quad \mu(K_\varepsilon^c) \leqslant \varepsilon .$$
"compact inclus dans"
(où $K_\varepsilon^c = X \setminus K_\varepsilon^c$) (normal^t "relativ^t compact" mais ça revient au m̂)

<u>Th</u> [Prokhorov]
Soit X polonais (séparable, métrisable, complet)
Sont $\Leftrightarrow$:

i) A est compacte
ii) A est fermée et tendue

Montrons que $Marg(\mu,\nu)$ est fermée :

Soit $(\pi_n) \in Marg(\mu,\nu)^{\mathbb{N}}$ et $\pi \in \mathcal{P}(E \times F)$ tq $(\pi_n) \longrightarrow \pi$

À montrer : $\pi \in Marg(\mu,\nu)$.

$\forall f \in \mathcal{C}_b^0(E)$ $\int_{E\times F} f(x)\pi(dx,dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} f(x)\pi_n dxdy$

$= \lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mu dx = \int_E f(x)\mu dx$

et de même $\forall g \in \mathcal{C}_b^0(F)$ $\int_{E\times F} g(y)\pi(dx,dy) = \int_F g(y)\nu(dy)$

Montrons que $Marg(\mu,\nu)$ est tendue

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists K_1 \subset\subset X$ et $K_2 \subset\subset Y$; $\mu(K_1^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\nu(K_2^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $K = K_1 \times K_2$. Alors $\forall \pi \in Marg(\mu,\nu)$

$$\pi(K^c) = \pi(K_1^c \times K_2^c) \leq \pi((K_1^c \times F) \cup (E \times K_2^c))$$

$$\underset{\text{SS additivité}}{\leq} \pi(K_1^c \times F) + \pi(E\times K_2^c) = \mu(K_1^c) + \nu(K_2^c) \leq \varepsilon$$

Par Prokhorov $Marg(\mu,\nu)$ est compacte

<u>Déf</u> Pour (X,d) métrique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ est s.c.i. si $\forall x \in X$ et $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n) \to x$ on a $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$

<u>Prop</u> Si X est compact et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i. alors f atteint sont inf.

<u>Preuve</u> : soit (x_n) tq $f(x_n) \to \inf_X f$, soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite CV vers $x \in X$

Alors $f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} (x_{n_k}) = \inf_X f$

<u>Prop</u> Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i. et minorée alors $\exists (f_n)$ tq (i) $(f_n) \nearrow$ (ii) $f_n \in \mathcal{C}_b^0(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (iii) $(f_n) \to f$ simpl^t

<u>Prop</u> Si c est s.c.i. alors $J_c = \pi \mapsto \int c \, d\pi$ est s.c.i.

<u>Preuve</u> Si c est cont. bornée, alors J_c est m̂ continue.
(car si $\pi_n \to \pi$ $J_c(\pi_n) = \int c \, d\pi_n \to J_c(\pi)$)

Dans le cas général (c_n) approxime c comme dans la propo. bas p. 22.

Alors $\forall \pi \in Marg(\mu,\nu)$ $J_c(\pi) = \int c \, d\pi = \lim \int c_n \, d\pi$
$= \sup_{n \geq 0} J_{c_n}(\pi)$ (car $\nearrow$)

or le sup de fonctions s.c.i. est s.c.i. (exo). □

<u>Th</u> Si c est s.c.i. alors il existe un plan de transport optimal, i.e. $O_c(\mu,\nu) \neq \phi$.